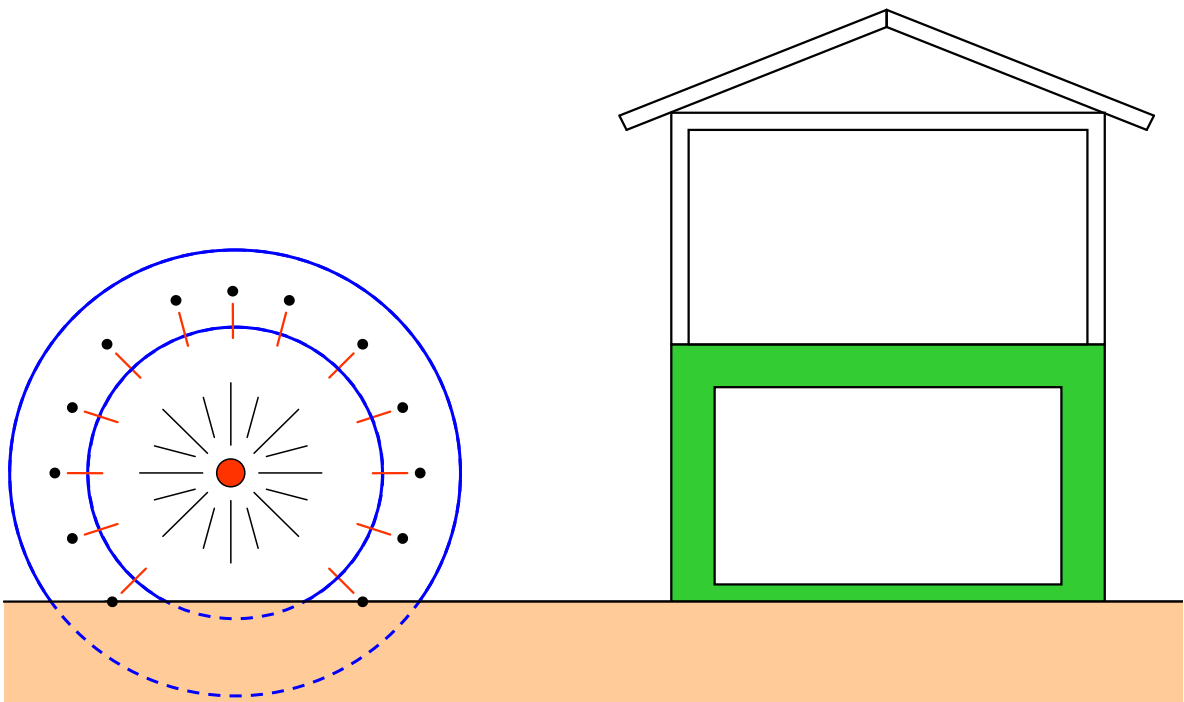




Myndigheten för
samhällsskydd
och beredskap

Splitterverkan



Splitterverkan

Författare: Joosef Leppänen, Cowi AB

2012 MSB

Publikationsnummer: MSB345

ISBN: 978-91-7383-188-8

Innehållsförteckning

Förord.....	5
Sammanfattning	7
Beteckningar	8
1 Introduktion.....	11
1:1 Bakgrund.....	11
1:2 Syfte och målsättning	11
1:3 Begränsningar	11
2 Dynamik	14
2:1 Introduktion	14
2:2 Grundläggande samband	14
2:21 Kraft, rörelsemängd, impuls och energi.....	14
2:22 Elastisk stöt	16
2:23 Plastisk stöt	19
2:3 Elastisk vågutbredning.....	20
2:4 Elastisk stöt med vågpropagering	26
2:41 Introduktion till elastisk stöt	26
2:42 Stöt mot en stel vägg.....	32
2:43 Symmetrisk stöt	36
2:44 Stöt mellan lika material	37
2:5 Stötvågsparametrar	48
2:6 Plastisk stöt med stötvågsparametrar.....	50
3 Splitter	53
3:1 Introduktion	53
3:11 Definition av splitter	53
3:12 Arkivbomben	54
3:2 Fragmentering.....	55
3:3 Splitterfördelning.....	56
3:31 Beräkning av splitterfördelning	56
3:32 Splitterfördelningsparameter.....	58
3:33 Splitterfördelning för olika bomber	65
3:4 Splittertäthet och form	70
3:41 Splittertäthet.....	70
3:42 Splitterform	72
3:5 Splitterhastighet	72

Splitterverkan

4	Material	75
4:1	Introduktion	75
4:2	Betong	75
4:21	Statisk respons	75
4:22	Dynamisk respons	77
4:3	Stål	80
4:31	Statisk respons	80
4:32	Dynamisk respons	81
4:4	Tillståndsekvation	81
4:41	Bestämning av tillståndsekvationen	81
4:42	Tillståndsekvation för olika material	84
5	Splitterverkan	86
5:1	Introduktion	86
5:2	Penetration	86
5:3	Perforation	88
5:4	Utstötning	89
5:5	Jämförelse mellan skadefenomen	91
5:6	Höghastighetspenetration	93
6	Kombinerad stötvågs- och splitterbelastning	96
6:1	Introduktion	96
6:2	Översikt om stötvågsbelastning	97
6:3	Skydd mot stötvågs- och splitterbelastning	100
6:31	Introduktion	100
6:32	Egenskaper hos bra skydd	100
6:4	Impulsbelastning	106
6:41	Enfrihetsgradssystem (SDOF)	106
6:42	Omvandling från balk till SDOF	108
6:43	Omvandlingsfaktorer	110
6:5	Exempel på kombinerad stötvågs- och splitterbelastning	113
6:51	Problemställning	113
6:52	Stötvågsbelastning	117
6:53	Splitterbelastning	120
6:54	Konstruktionens respons på impulsbelastning	127
7	Slutsatser	131
8	Referenser	132

Splitterverkan

Bilaga A	Dynamik - detaljer	135
A:1	Klassisk stelkroppsdyamik	135
A:11	Härledning av hastigheter för elastisk stöt.....	135
A:12	Härledning av hastigheter för plastisk stöt.....	136
A:2	Härledning av konserveringslagarna	137
A:3	Härledning av Rayleighlinje	141
A:4	Tabulerade stötvågsparametrar	142
A:5	Härledning av partikelhastighet	142
A:6	Elastisk stöt mellan olika material	143
A:7	Exempel med plastisk stöt beräknat med stötvågsparametrar	148
A:71	Plastisk stöt mellan identiska stavar	149
A:72	Plastisk stöt mellan två stavar av olika material	151
A:73	Plastisk stöt mellan två stavar av olika material med olika längder.....	156
Bilaga B	Splitter - detaljer	158
B:1	Arkivbomb.....	158
B:2	Omvandlingsfaktorer mellan inch-pound till SI-enheter	162
B:3	Splitterhastighet	162
B:4	Splitterfördelning.....	169
B:5	Bombgeometri	171
B:51	Ekvivalent cylinder	171
B:52	Tangent-ogival nosform.....	173
Bilaga C	Splitterverkan - detaljer.....	177
C:1	Penetrationsdjup	177
C:11	ConWep	177
C:12	Bk 25	179
C:2	Perforation	180
C:3	Utstötning	180
Bilaga D	Kombinerad stötvågs- och splitterbelastning - detaljer	182
D:1	SDOF	182
D:11	Explicit central differensmetod.....	182
D:12	Omvandlingsfaktorer	183

Förord

Denna rapport behandlar splitterbelastning. Arbetet som presenteras har utförts under perioden april 2006 till april 2012 på Cowi AB.

Mål med rapporten är att bidra till Myndigheten för samhällsskydd och beredskaps, MSB:s, långsiktiga arbete med att bygga upp en kunskapsbank för fysiskt skydd. Tre viktiga delar i denna kunskapsbank är områdena luftstöt-våg, markstöt-våg och splitter. Denna rapport behandlar splitter och i referenserna går det att hitta andra delar av denna kunskapsbank.

En stor del av arbetet har varit att insamla befintlig kunskap samt förklara och härleda mer eller mindre komplexa begrepp till ingenjörsspråk. Vetenskaplig litteratur är ofta väldigt kortfattad och det saknas härledningar från grundläggande samband. För en verksam ingenjör finns ofta inte tid att sätta sig in denna litteratur. Ambitionen i skrivandet är att pedagogisk förklara fysikaliska samband samt visa härledningar för ofta komplexa matematiska uttryck.

Denna bok vänder sig till folk som är intresserade av fördjupad kunskap inom områdena splitter, splitterbelastning och materialegenskaper vid dynamisk belastning samt att få en introduktion i dynamik och stöt-vågsteori.

Arbetet har följts av en referensgrupp i form av Björn Ekengren, MSB, Morgan Johansson, Reinertsen Sverige AB och Leo Laine, LL Engineering; ett stort tack till referensgruppen. De har bidragit till stor del av planeringen till innehållet i rapporten genom kontinuerliga diskussioner där vi har haft förnöjsamma heldagar flertal gånger per år med god förtäring och mycket glass.

Rapporten har granskats förutom av referensgruppen även av Göran Svedbjörk, Grontmij AB. Göran har en mycket lång erfarenhet och besitter stor kunskap inom ämnet. Ett stort tack till Morgan, Björn, Leo och Göran för bra synpunkter på innehållet i denna rapport.

Göteborg, april 2012

Joosef Leppänen

Sammanfattning

Syftet med denna rapport är att öka Myndigheten för samhällsskydd och beredskaps, MSB:s, nuvarande kunskapsbas för extrema belastningar i betongkonstruktioner. Rapporten behandlar främst splitterverkan. Den behandlar även grundläggande fysikaliska samband för stötar och stötvågor, såsom rörelsemängd, impuls, impulstäthet samt kinetisk eller potentiell energi. Vidare behandlas materialegenskaper vid dynamiska och extrema belastningar.

Ett viktigt mål är att kunna beskriva komplexa fysikaliska fenomen på ett grundläggande sätt och med en pedagogisk framställning. Exempelvis skall ett skyddsrum klara en extrem belastning som uppstår vid en explosion. När en bomb detonerar orsakas inte enbart en stötvåg utan även splitter kommer farande mot en betongkonstruktion. När stötvågen och splittret träffar konstruktionen uppstår många komplexa fysikaliska fenomen simultant, splitter tränger in i konstruktionen, en stötvåg propagerar och orsakar komplexa reflexioner i konstruktionen. Betongen utsätts för en kraftig belastning och splittret orsakar kraterbildning vid anslaget och om inträngningsdjupet är tillräckligt stor kan utstötning eller till och med perforation ske.

Komplexiteten gör att det är oerhört svårt att hitta analytiska lösningar för denna typ av belastning. Därför har en betydande mängd empiriska och semianalytiska samband tagits fram under föregående sekel. Ibland har tankegången bakom dessa samband fallit i glömska, där ett matematiskt uttryck lämnats till nästa generation. I denna rapport granskas kritiskt och redovisas olika empiriska samband för hur splitterhastigheten eller skador i konstruktioner kan bestämmas utifrån en given belastning. Vidare är ambitionen att härleda och följa tankegången av uttrycken i den mån det är möjligt.

En skada hos en konstruktion kan indelas i dess globala och lokala respons. Global skada kan vara exempelvis att konstruktionen utsätts för en plastisk utböjning. Lokal skada kan vara exempelvis penetration, perforation eller utstötning.

En beräkningsmodell redovisas i denna rapport för att kunna räkna på impulsbelastning orsakad av splitter- och stötvågsbelastning. I denna beaktas splittrets verkan på ett något förenklat sätt, dock ger modellen en bra beskrivning av det fysikaliska uppförandet av konstruktionens verkningssätt.

Nyckelord: splitter, fragmentering, penetration, perforation, utstötning, explosion, stötvåg, dynamik, elastisk stöt, plastisk stöt, betong, tillståndsekvation, töjningshastighet.

Beteckningar

Romerska versaler

A	area, tvärsnittsarea, konstant vid beräkning av rotationskapacitet
A_s	armeringsarea
B	Motts konstant
C	dämpare, konstant vid beräkning av rotationskapacitet
C_d	luftmotståndskoefficient
C_e	dämpare för enfrihetsgradssystem
C_0	vågshastighet för elastisk material
E	energi, energiintensitet, elasticitetsmodul
E_0	energiintensitet hos ostört medium
E_f, E_e	energi före och efter
E_i, E_y	inre energi, yttre energi
E_k, E_p	kinetisk energi, potentiell energi
F	kraft
F_e	kraft för enfrihetsgradssystem
G	skjuvmodul, explosivkonstant
I	impuls, tröghetsmoment
K	fjäderstyvhet, splitterfördelningsparameter
K_e	fjäderstyvhet för enfrihetsgradssystem
K_{el}	elastisk styvhet
L, L_b	längd, bombens längd
M	moment, total massa
M_b	bombens massa
M_e	massa för enfrihetsgradssystem
M_A	splitterfördelningsparameter
M_h	höljets massa
M_{Rd}	momentkapacitet
N	normalkraft, nosformfaktor
P, P_0	tryck, initial tryck
P_s^+, P_s^-	övertryck, undertryck
R	inre mothållande kraft
R_e	inre mothållande kraft för en enfrihetsgradssystem
S	yta för sfär
S_1, S_2	materialkonstanter för att bestämning av stötvågshastighet
T	tvärkraft
U_p, U_{pI}	partikelhastighet, infallande partikelhastighet
U_{pR}, U_{pT}	reflekterande och transmitterad partikelhastighet
U_s	stötvågshastighet
Q	utförd värme
Q_{tot}	total last på balk
V, V_0	volym, initial volym

Splitterverkan

V_h, V_Q	höljets volym, sprängämnets volym
W	utfört arbete, laddningsvikt i kg TNT
W_i	inre deformationsarbete

Romerska gemener

a	acceleration
b	bredd
c	våghastighet
d	diameter, effektivhöjd
d_i, d_b	höljets ekvivalenta innerdiameter och ytterdiameter
e	studskoefficient
f_1, f_2, f_3, f_4, f_5	omvandlingsfaktor mellan inch-pound till SI-enheter
f_c, f_{ct}	betongens tryckhållfasthet, betongens draghållfasthet
f_{ck}, f_{ctk}	karakteristisk tryck- och draghållfasthet för betong
f_{st}	armeringens flythållfasthet (draghållfasthet)
f_y	flytspänning
g	tyngdacceleration
h	höjd
i	impulstäthet
m	massa, splittermassa
$m_s, m_{s,medel}$	splittermassa, splittrens medelmassa
m_{sd}	dimensionerande splittermassa
n	antal, godtyckligt heltal, kvot
n_s	antal splitter, totalt antal splitter
n_{ms}	antalet splitter med massan större än splittermassa m_s
n_{msd}	antalet splitter som är större än det dimensionerande splittrets massa
i	impulstäthet
q	utbredd last
r	radie, sträcka
t	tid, tjocklek
t_a, t_{cr}	ankomsttid, kritisk tidssteg
t^+, t^-	varaktighet för positiv och negativ fas för en stötvåg
t_h	höljets ekvivalenta tjocklek
t_p	minsta tjocklek för att undvika perforation
t_u	minsta tjocklek för att undvika utstötning
u, \dot{u}, \ddot{u}	förskjutning, hastighet, acceleration
u_{el}, u_{pl}	elastisk och plastisk förskjutning
u_s	förskjutning i systempunkten för en enfrihetsgradssystem
v	specifik densitet
v, v_r, v_s	hastighet, splitterhastighet vid sträckan r , splitterhastighet
v_0, v_f, v_e	utgångshastighet, hastighet före och efter
v_R	relativ hastighet
v_s	systempunktens hastighet i en enfrihetsgradssystem
x	inträngningsdjup, tryckzonshöjd

Grekiska tecken

α	explosivkonstant
β	konstant för att beräkna medelskjuvvinkel
ε	töjning
$\varepsilon_c, \varepsilon_s$	betongtöjning, armering
κ	omvandlingsfaktorer för en enfrihetsgradssystem
$\kappa_M, \kappa_C,$	omvandlingsfaktor för massa och dämpare
$\kappa_K, \kappa_P,$	omvandlingsfaktor för fjäderstyvhet och last
ζ	dämpningskoefficient
ρ, ρ_0	densitet, initial densitet
ρ_A, ρ_B	densitet för medium A och medium B
Δ	ändring inkrementellt
σ_c, σ_y	spänning, flytspänning
σ_c, σ_s	betongspänning, armeringsspänning
$\sigma_I, \sigma_R, \sigma_T,$	infallande, reflekterad och transmitterad spänning
ω	vinkelfrekvens

Index

f, e före, efter

Förkortningar och uttryck

Arkivbomb	Enligt avsnitt 3:1
MSB	Myndigheten för samhällskydd och beredskap
SDOF	Single Degree of Freedom, enfrihetsgradssystem
SR	Skyddsrumregler
TNT	Trinitrotoluen, ibland stavat trinitrotoulen, är det kemiska namnet på sprängämnet Trotyl.

1 Introduktion

1:1 Bakgrund

Myndigheten för samhällsskydd och beredskap, MSB, har uppdraget att bygga och underhålla skyddsrum i Sverige. I dagsläget byggs det dock inte många skyddsrum i Sverige. För att i framtiden kunna bygga säkra skyddsrum är det dock nödvändigt att bevara samt även förnya befintlig kunskap. MSB arbetar därför långsiktigt med att bygga upp en kunskapsbank för fysiskt skydd och genom forskning inom området explosionsbelastning blir detta möjligt. Tre mycket viktiga delar gällande belastningen ingår, dessa är: luftstöt våg, markstöt våg och splitterverkan.

I MSB:s skyddsrumregler, SR09, MSB (2009), ställs krav på hur ett skyddsrum skall dimensioneras. Dessa krav härrör från att skyddsrummet skall tåla en belastning som motsvarar "verkan av en tryckvåg motsvarande den som åstadkoms av en 250 kilograms minbomb med 50 viktprocent trotyl som briserar i det fria 5,0 meter från skyddets utsida vid fri tryckavlastning". Dessutom skall skyddsrummet, "även tåla verkan av splitter från en brisad".

För att förstå och framför allt dokumentera på så sätt att flera personer enklare kan sätta sig in i de grundläggande mekanismerna bakom splitterbelastning fick författaren till denna bok uppdraget att studera splitterverkan på konstruktioner.

1:2 Syfte och målsättning

Syftet i detta arbete är att öka MSB:s kunskapsbas gällande splitterverkan och dess verkan på skyddande konstruktioner. Rapporten skall kunna fungera som en god grund för fördjupade studier inom området.

Målsättningen är att åstadkomma en grundlig och pedagogisk framställning i ämnet splitterverkan på konstruktioner, genom detta bevaras kunskapen för framtida bruk.

1:3 Begränsningar

Den fysiska belastningen på ett skyddsrum orsakad av en vapenlast kan indelas i tre huvudgrupper enligt nedan:

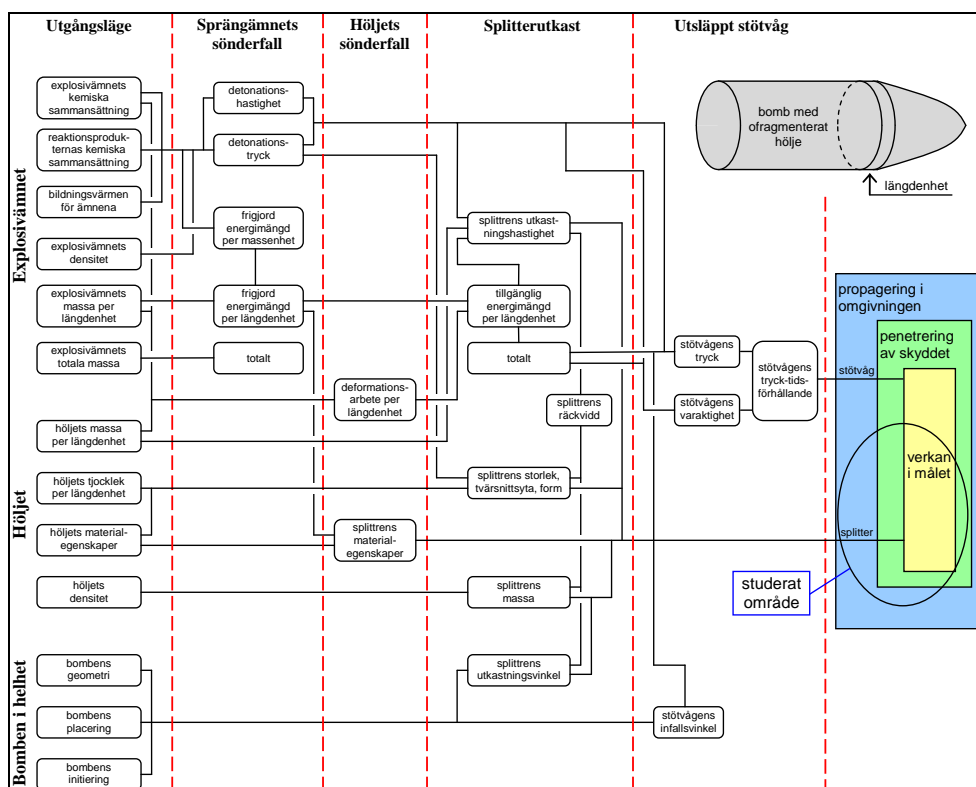
Splitterverkan

- luftstöt våg
- markstöt våg
- splitterverkan

Av dessa tre behandlas huvudsakligen splitterverkan i denna rapport. Dock, är många av mekanismerna även möjliga att direkt applicera till last av luftstöt våg och markstöt våg. Inverkan av luftstöt våg är grundligt genomgången av Johansson (2002) och markstöt våg av Laine 2012). Bebyggelsens motståndsförmåga mot extrem dynamisk belastning har studerats av Johansson och Laine (2007, 2008 och 2009).

Eftersom skyddsrum är byggda av armerad betong, behandlas främst armerade betongkonstruktioner i denna rapport. Dock har vissa generella principer även applicerats till andra material och konstruktioner.

Figur 1:3a visar principiellt vad som sker vid en explosion, från att detonationen sker tills luftstöt vågen och splittret når målet. Detta är ett mycket komplicerat förlopp där ett flertal faktorer påverkar den slutgiltiga verkan på målet. Exempel på dessa faktorer är explosionsämnets kemiska sammansättning, bombhöljets densitet eller bombens placering. Huvudsakligen studerat område visas i figuren, dock berörs även flera andra områden i detta arbete.



Figur 1:3 a. Schematisk illustration från detonation av en bomb till verkan i målet. Inringat område visar studerat område i denna rapport, vilket är verkan i målet av splitter.

Splitterverkan

Andra viktiga effekter som orsakas av en explosion kan vara joniserande strålning från radioaktivt avfall (främst atombomb), brandgaser, elavbrott, vattenskador orsakade av brutna rör eller dålig luft orsakad av kollapsade ventilationssystem. Dessa behandlas inte i denna rapport, utan läsaren hänvisas till Skyddsrumregler, SR09, MSB (2009).

2 Dynamik

2:1 Introduktion

Splitterbelastning är en dynamisk belastning i extrem form. För att få en förståelse för vilka mekanismer som är kopplade till splitterverkan behövs kunskap om de dynamiska sambanden, vilket behandlas i detta kapitel. Först behandlas grundläggande mekanik såsom kraft, rörelsemängd, impuls och impulstäthet, samt energi. Vidare behandlas elastisk och plastisk stöt i detta kapitel enligt stelkroppsdynamiken. Stelkroppsdynamiken försummar dock vågpropagering i materialet när två kroppar stöter emot varandra.

2:2 Grundläggande samband

2:21 *Kraft, rörelsemängd, impuls och energi*

Kraft F definieras enligt Newtons andra lag som en produkt av massa m och acceleration a :

$$F = ma \quad (2:21a)$$

där acceleration kan skrivas som:

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (2:21b)$$

och hastighet som:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (2:21c)$$

där acceleration är ändring av hastighet dv över tiden dt , medan hastighet är ändring av sträckan ds över tiden dt .

Rörelsemängd definieras som produkten mellan massa m och hastighet v .

$$p = m \cdot v \quad (2:21d)$$

När en kropp med massan m och hastigheten v_0 påverkas av en kraft $F(t)$ under tiden $(t_1 - t_0)$ fås impulsen I , vilket är lika med ändring av rörelsemängd. För ett system där massan är konstant fås via insättning av ekvation (2:21a) att:

Splitterverkan

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} m \frac{dv}{dt} dt = m \int_0^v dv = mv_e - mv_0 \quad (2:21e)$$

där v_e är hastighet efter det att kroppen har utsatts för kraften F under tiden $(t_1 - t_0)$.

Tryck $P(t)$ definieras som en kraft genom arean A :

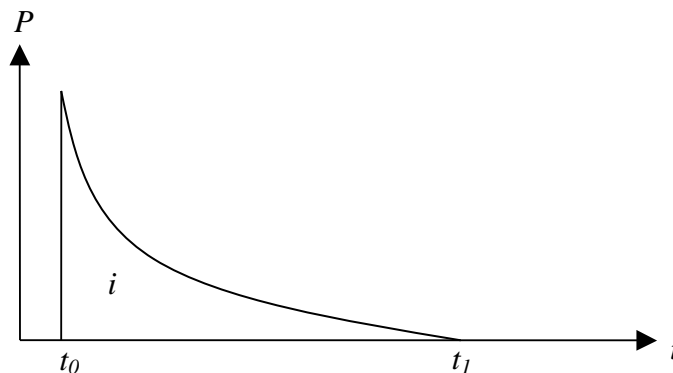
$$P(t) = \frac{F(t)}{A} \quad (2:21f)$$

insättning i ekvation (2:21e) ger:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} P(t) A dt = A \int_{t_0}^{t_1} P(t) dt \quad (2:21g)$$

$$i = \int_{t_0}^{t_1} P(t) dt \quad (2:21h)$$

där i är impulstäthet och är lika med arean under tryck-tidskurvan i figur 2:21a.



Figur 2:21a. Tryck-tidssamband.

Kinetisk energi E_k ofta även benämnd som rörelseenergi definieras

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \quad (2:21i)$$

där m är massan och v är hastighet.

Potentiell energi E_p är inre energi hos en kropp och ofta förknippas detta med lägesenergi. Lägesenergi är dock bara en form av potentiell energi, vilket styrs av tyngdkraften enligt följande:

$$E_{\text{lagensenergi}} = mgh \quad (2:21j)$$

där m är massan, g är tyngdaccelerationen och h är höjden.

Ett sätt att vidga begreppet potentiell energi är att tänka sig att en spänd fjäder som är stillastående har en högre potentiell energi än i ospänt läge. Ifall den spända fjädern frigörs omvandlas den potentiella energin till kinetisk energi. Ett annat exempel på detta är när en laddning detonerar. Sprängämnen i laddningen har en viss potentiell energi och vid detonation frigörs den potentiella energin till kinetisk energi och värme.

Energien är konstant i ett slutet system där det inte tillförs ny energi. Omvandling i energi E för ett slutet system tecknas som:

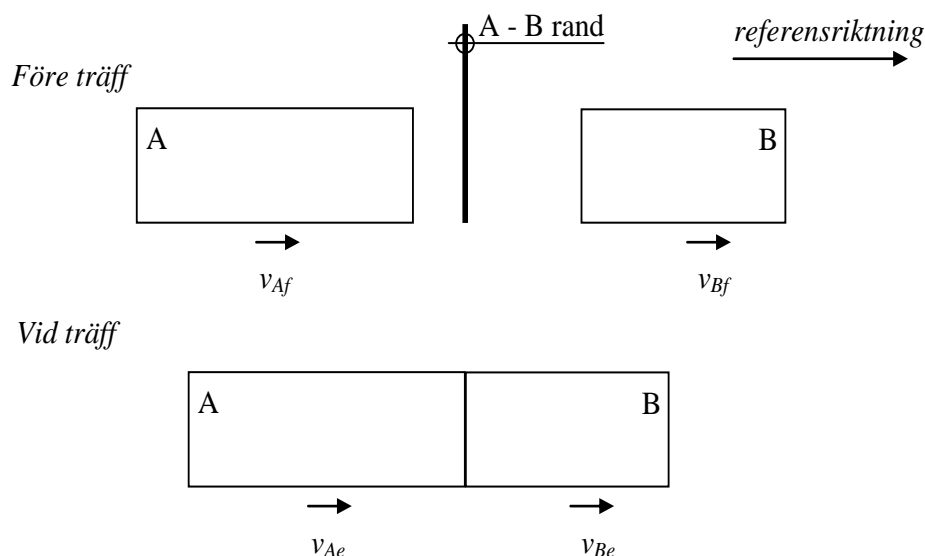
$$\text{där } E = \Delta E_k + \Delta E_p \quad (2:21k)$$

Kinetisk energi kan omvandlas till potentiell energi eller tvärtom. I verkligheten finns dock inga system där en hundra procentig energiomvandling av kinetisk energi till eller från potentiell energi äger rum, utan det finns förluster i form av exempelvis värme eller friktion. Dock är den totala energin konstant i alla system där även värme Q och utfört arbete W beaktas.

2:22 *Elastisk stöt*

Klassisk stelkroppsdyamik beskriver en stöt mellan två kroppar. Studera en fullständig elastisk, rak central stöt, där föremålen rör sig längs en rät linje och att summan av alla förluster på grund av värme och friktion samt att yttre krafter som verkar på systemet är noll enligt figur 2:22a. Referensriktning är åt höger, vilket innebär att för ett positivt tecken på hastigheten rör sig kroppen åt höger. I figuren är A-B randen den punkt där dessa två kroppar träffar varandra. Detta innebär med denna definition att kropp A inledningsvis rör sig åt höger (positivt tecken) och kropp B åt vänster (negativt tecken). Här har dessutom kroppen B högre hastighet, eftersom den är längre från randen.

Splitterverkan



Figur 2:22a. Elastisk stöt för kropp A och B.

Kropp A har massan m_A och hastigheten v_{Af} före och v_{Ae} efter stöten. Motsvarande har kropp B massan m_B och hastigheten v_{Bf} före och v_{Be} efter stöten.

Utifrån hastigheterna före stöt och massan hos kropp A och B är kända kan hastigheten efter stöt bestämmas med följande ekvationer, härledning av dessa ekvationer finns i Bilaga A:1:

$$v_{Ae} = \frac{v_{Af}(m_A - m_B) + 2v_{Bf}m_B}{m_A + m_B} \quad (2:22a)$$

$$v_{Be} = \frac{2v_{Af}m_A + v_{Bf}(m_B - m_A)}{m_A + m_B} \quad (2:22b)$$

Specialfallet då hastigheten för kropp B är noll före stöt ger följande hastigheter efter stöt:

$$v_{Ae} = v_{Af} \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} \quad (2:22c)$$

$$v_{Be} = 2v_{Af} \frac{m_A}{m_A + m_B} \quad (2:22d)$$

Genom att studera ekvation (2:22c) och (2:22d) kan följande ses då kropp A stöter emot en stillastående kropp B:

Ifall massan m_A är mindre än m_B blir hastigheten negativ för kropp A, det vill säga att den rör sig åt vänster i figur 2:22a.

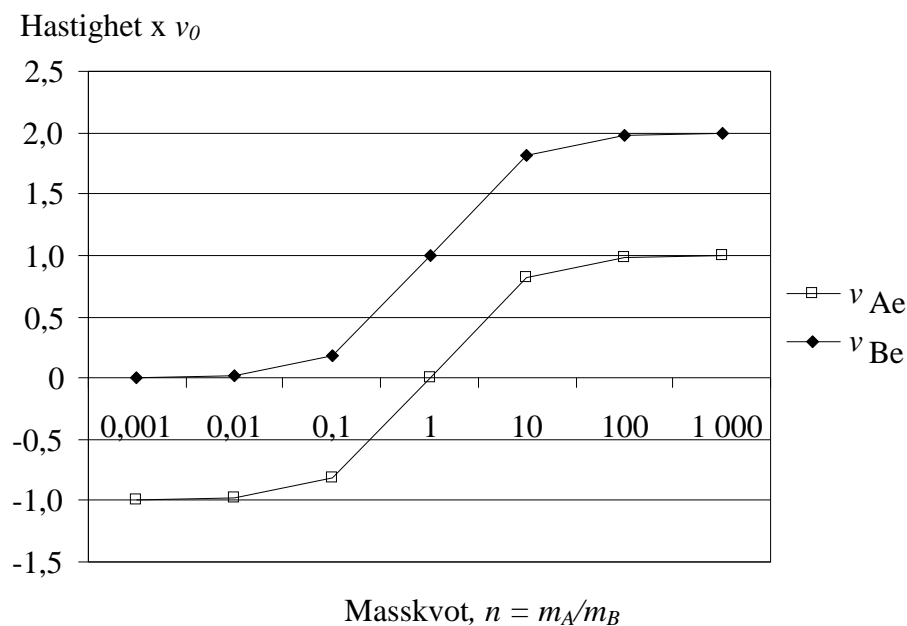
Splitterverkan

Ifall massan m_A är lika med m_B stannar kropp A och kropp B rör sig åt höger i figur 2:22a med samma hastighet som kropp A träffade kropp B. I detta fall transmitteras all rörelsemängd från kropp A till kropp B.

Ifall massan m_A är större än m_B färdas kropp A och B åt höger i figur 2:22a. Kropp B får högre hastighet än kropp A.

Figur 2:22b visar ett diagram där kropp A stöter emot kropp B med hastigheten v_0 med referensriktning enligt figur 2:22a. Massan för kropp A är n gånger massan för kropp B. Då $n \rightarrow 0$, det vill säga att massan för kropp A är mycket lägre än för B (motsvarar en kropp som träffar en fast vägg) får kropp A samma hastighet fast med motsatt tecken (den studsar tillbaka), medan kropp B står stilla. Då $n = 1$, det vill säga kropp A väger lika mycket som kropp B stannar kropp A och kropp B rör sig åt höger med hastigheten v_0 . Fallet då $n \rightarrow \infty$, det vill säga att kropp A har mycket högre massa än kropp B, bibehåller kropp A sin hastighet medan kropp B erhåller dubbla hastigheten.

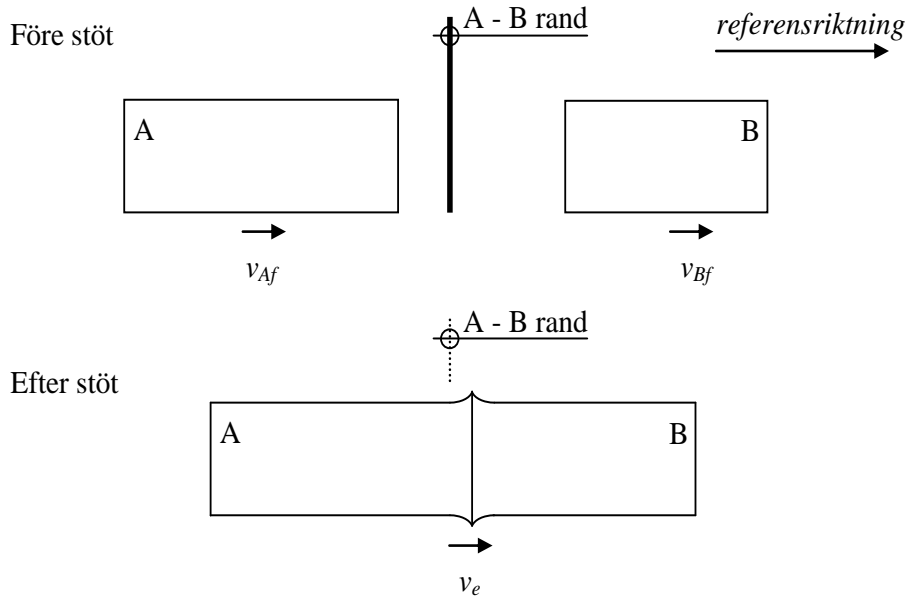
Sammanfattningsvis så kan kropp A aldrig få högre hastighet efter stöten än den hade innan stöten oavsett massan hos kropp B, medan kropp B aldrig kan få en negativ hastighet och hastigheten kan inte överskrida anslagshastigheten för kropp A med mer än dubbelt oavsett masskillnaden mellan de två kroppar som stöter emot varandra. Detta illustreras i figur 2:22b.



Figur 2:22b. Hastighet efter stöt hos två kroppar som stöter emot varandra. Före stöt har kropp A hastigheten v_0 och kropp B står stilla, n är kvoten mellan massorna.

2:23 *Plastisk stöt*

Med en fullständig plastisk stöt mellan två kroppar menas att kropparna sitter ihop efter stöten och inte lämnar varandra, vilket innebär att båda kropparna får samma hastighet efter stöten, se figur 2:23a.



Figur 2:23a. En fullständig plastisk stöt för kropp A och B.

Hastigheten efter stöt v_e blir:

$$v_e = \frac{m_A v_{Af} + m_B v_{Bf}}{m_A + m_B} \quad (2:23a)$$

där m_A och m_B är massan hos kropp A respektive kropp B, v_{Af} och v_{Bf} är hastighet före stöt för kropp A respektive kropp B. Härledning av detta uttryck finns i Bilaga A:1.

För en stöt som inte är fullständigt plastisk introduceras studscoeffcienten e , vilken är en materialkonstant enligt följande:

$$e = \frac{v_{Be} - v_{Ae}}{v_{Af} - v_{Bf}} \quad (2:23b)$$

vilket beskriver den relativa hastigheten före och efter stöt mellan kropparna. Studskoeffcienten kan variera mellan 0 och 1. Extremvärdena 0 och 1 ger:

- $e = 1$ fullständigt elastisk stöt
- $e = 0$ fullständigt plastisk stöt

Hastighet efter stöt för en stöt som inte är fullständigt plastisk fås med följande ekvationer:

$$v_{Be} = \frac{m_A e(v_{Af} - v_{Bf}) + m_A v_{Af} + m_B v_{Bf}}{m_A + m_B} \quad (2:23c)$$

$$v_{Ae} = \frac{m_B e(v_{Bf} - v_{Af}) + m_A v_{Af} + m_B v_{Bf}}{m_A + m_B} \quad (2:23d)$$

Härledning av dessa finns i Bilaga A:1. Genom att sätta studscoeffcienten e till 1,0 i ekvation (2:23c) och (2:23d) fås en fullständigt elastisk stöt jämför med ekvation (2:22a) och (2:22b), och genom att sätta studscoeffcienten till noll fås en fullständigt plastisk stöt vilket kan jämföras med ekvation (2:23a).

2:3 Elastisk vågutbredning

När en stav stöter emot en annan genereras en spänningsvåg från den ena staven till den andra. Denna våg kan vara en elastisk eller en plastisk våg. I klassisk stelkroppsdyamik beaktas inte vågutbredning. Ifall splitter eller en stötvåg träffar en vägg genereras en tryckt spänningsvåg, vilket propagerar i väggen. Denna våg, med dess reflexioner, kan orsaka stor skada. Detta kan inte beaktas med klassisk stelkroppsdyamik, varför ett alternativt betraktelsesätt introduceras här. Viktiga referenser i detta kapitel är Goldsmith (1960), Meyers (1994) och Zukas (1990).

En generell lösning till stötar mellan två stavar A och B kan ställas upp med lagen om konservering av energi:

$$E_f + m_A \frac{v_{Af}^2}{2} + m_B \frac{v_{Bf}^2}{2} = E_e + m_A \frac{v_{Ae}^2}{2} + m_B \frac{v_{Be}^2}{2} + W \quad (2:3a)$$

där E_f och E_e är inre energi före respektive efter stöt, vilket motsvarar den potentiella energin, och W representerar det arbete som systemet kräver, indexen f och e står för före respektive efter. Denna ekvation är svår att lösa direkt utan vetskap om den inre energin. Därför är det enklare att lösa denna typ av problem som ett vågpropageringsproblem. Först studerar vi dock en elastisk våg, för att sedan gå vidare till en elastisk stöt samt en plastisk stöt.

För att studera reflexion av elastiska vågor mellan två medium, exempelvis något fast material eller luft, se figur 2:3a.

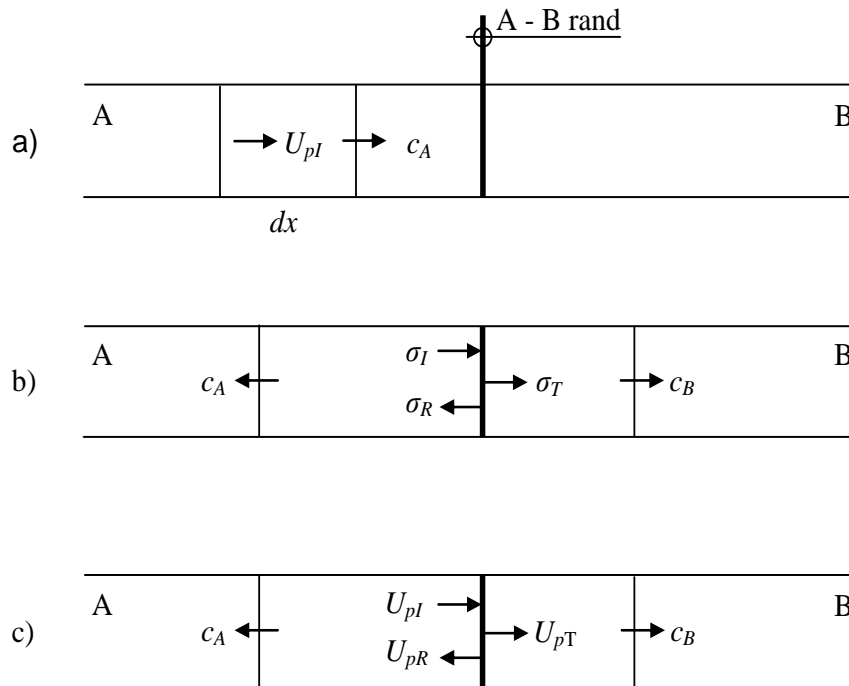
Figur 2:3a a) visar en infallande spänningsvåg i medium A på väg med en våghastighet c_A mot medium B som är stillastående. När vågen rör sig i medium A genereras en infallande partikelhastighet U_{pl} i mediet i samma riktning som våghastigheten. Våghastigheten beskriver hur snabbt spänningsvågen rör sig i materialet, medan partikelhastigheten beskriver hur snabbt

Splitterverkan

materialet komprimeras eller separeras. Materialet får infallande spänningen σ_I . Våghastigheten c_A är alltid större än den infallande partikelhastigheten U_{pI} . Det vill säga att spänningsvågen rör sig alltid snabbare än partiklarna.

När vågen c_A når randen mellan A och B, se figur 2:3a b) genereras en reflekterad spänningsvåg σ_R och en transmitterad spänningsvåg σ_T . Kraftjämvikt skall råda i randen.

Figur 2:3a c) visar partikelhastighet när vågen har nått randen, den reflekterade och transmitterade partikelhastigheten beror på de ingående mediernas egenskaper.



Figur 2:3a. Schematisk bild av en longitudinell spänningsvåg som rör sig från vänster till höger och reflekterar mellan två medium A och B.

För att beräkna den infallande, transmitterade och reflekterade spänningen och partikelhastigheten, härleds detta utifrån att impulsen är lika med ändring i rörelsemängd enligt ekvation (2:21e):

$$I = \int_0^t F(t) dt = m \int_0^v dv = mv_e - mv_0 \quad (2:3b)$$

Studera stav A i figur 2:3a a). Eftersom hastigheten är noll i en given punkt innan vågen passerat blir ändringen i partikelhastighet lika med partikelhastighet U_p .

$$I = m\Delta U_p = mU_p \quad (2:3c)$$

Splitterverkan

omskrivning ger, där vi nyttjar att spänning σ är lika med en kraft genom arean A och massan m är produkten mellan densitet ρ och volym V .

$$\sigma A dt = \rho A dx U_p \quad (2:3d)$$

där $m = \rho V = \rho A dx$, där volymen uttrycks som en sträcka dx multiplicerat med arean A .

Förkorta bort arean och lös ut spänningen

$$\sigma = \rho \frac{dx}{dt} U_p = \rho c U_p \quad (2:3e)$$

där våghastigheten c

$$c = \frac{dx}{dt} \quad (2:3f)$$

och följande produkt är impedans:

$$\rho c \quad (2:3g)$$

där ρ = densitet.

Impedansen är en viktig materialegenskap för hur spänningsvågor (och stöt-vågor) propagerar, samt hur en spänningsvåg transmitteras eller reflekteras mellan olika medium. Densitet och våghastighet är normalt kända materialparametrar, och därmed är även impedansen känd när materialet är i elastiskt tillstånd. Ifall materialet komprimeras ökar densiteten och våghastigheten i materialet förändras, något som behandlas vidare i avsnitt 2:6. Därmed kan spänningen beräknas för ett material där impedansen och partikelhastigheten är kända. Ifall spänningen är känd kan partikelhastigheten beräknas enligt ekvation (2:3e).

I randen mellan stav A och B råder det jämvikt, se figur 2:3a b). Det vill säga den infallande spänningen σ_I adderad med den reflekterande spänningen σ_R skall vara lika med den transmitterade spänningen σ_T .

$$\sigma_I + \sigma_R = \sigma_T \quad (2:3h)$$

Kontinuitetsvillkor säger att summan av den infallande partikelhastigheten U_{pI} och den reflekterande partikelhastigheten U_{pR} skall vara lika med den transmitterade partikelhastigheten U_{pT} , se figur 2:3b c).

$$U_{pI} + U_{pR} = U_{pT} \quad (2:3i)$$

Partikelhastighet kan beräknas utifrån ekvation (2:3e).

Splitterverkan

$$U_{pI} = \frac{\sigma_I}{\rho_A c_A} \quad (2:3j)$$

$$U_{pR} = \frac{-\sigma_R}{\rho_A c_A} \quad (2:3k)$$

$$U_{pT} = \frac{\sigma_T}{\rho_B c_B} \quad (2:3l)$$

För att beräkna den transmitterade och reflekterade spänningen som funktion av den infallande spänningen kan detta härledas genom insättning av ekvation (2:3j), ekvation (2:3k) och ekvation (2:3l) i ekvation (2:3i):

$$\frac{\sigma_I}{\rho_A c_A} - \frac{\sigma_R}{\rho_A c_A} = \frac{\sigma_T}{\rho_B c_B} \quad (2:3m)$$

Impedanserna för de två medierna är $\rho_A c_A$ och $\rho_B c_B$, samt insättning av ekvation (2:3h) i ekvation (2:3m) ger:

$$\frac{\sigma_I}{\rho_A c_A} - \frac{(\sigma_T - \sigma_I)}{\rho_A c_A} = \frac{\sigma_T}{\rho_B c_B} \quad (2:3n)$$

vilket kan skrivas om som:

$$\frac{2\sigma_I}{\rho_A c_A} = \sigma_T \left(\frac{1}{\rho_A c_A} + \frac{1}{\rho_B c_B} \right) \quad (2:3o)$$

vilket kan förenklas till:

$$\frac{\sigma_T}{\sigma_I} = \frac{2\rho_B c_B}{\rho_A c_A + \rho_B c_B} \quad (2:3p)$$

på motsvarande sätt härleds den reflekterade spänningen delat med den infallande spänningen, då fås uttryck för att beräkna den transmitterade och den reflekterade spänningen som funktion av den infallande spänningen:

$$\frac{\sigma_T}{\sigma_I} = \frac{2\rho_B c_B}{\rho_A c_A + \rho_B c_B} \quad (2:3q)$$

$$\frac{\sigma_R}{\sigma_I} = \frac{\rho_B c_B - \rho_A c_A}{\rho_B c_B + \rho_A c_A} \quad (2:3r)$$

Utifrån dessa två ekvationer blir det uppenbart att den reflekterade och transmitterade spänningen är beroende på impedansen i båda medierna. Dessa samband är grundläggande för att beskriva hur en infallande stötvåg,

Splitterverkan

exempelvis orsakad av en explosion, transmitteras och reflekteras genom två olika material.

Vidare, ifall impedansen $\rho_{BCB} > \rho_{ACA}$, kommer en våg med samma tecken att reflektera tillbaks, eller ifall $\rho_{BCB} < \rho_{ACA}$, en våg med motsatt tecken att reflektera. Detta exemplifieras med två ytterlighetsfall där ρ_{BCB} är noll (fri ände) och ρ_{BCB} går mot oändligheten (motsvarande fix ände).

Fri ände, ρ_{BCB} är noll:

$$\frac{\sigma_T}{\sigma_I} = 0, \text{ ingen spänning transmitteras} \quad (2:3s)$$

$$\frac{\sigma_R}{\sigma_I} = -1, \text{ samma amplitud med motsatt tecken reflekteras.} \quad (2:3t)$$

Fix ände, ρ_{BCB} går mot oändligheten:

$$\frac{\sigma_T}{\sigma_I} = \frac{2\rho_{BCB}}{\rho_{ACA} + \rho_{BCB}} \approx 2, \text{ dubbla spänningen transmitteras} \quad (2:3u)$$

$$\frac{\sigma_R}{\sigma_I} = \frac{\rho_{BCB} - \rho_{ACA}}{\rho_{BCB} + \rho_{ACA}} \approx 1, \text{ samma spänning reflekteras} \quad (2:3v)$$

Uttryck för hur den reflekterade och transmitterade partikelhastigheten förändras i figur 2:3a c) kan härledas från ekvation (2:3h) och ekvationerna (2:3j-l) på liknande sätt som för de transmitterade och reflekterade spänningarna. För transmitterad partikelhastighet fås:

$$\frac{U_{pT}}{U_{pI}} = \frac{2\rho_{ACA}}{\rho_{ACA} + \rho_{BCB}} \quad (2:3w)$$

för reflekterad partikelhastighet fås:

$$\frac{U_{pR}}{U_{pI}} = \frac{\rho_{ACA} - \rho_{BCB}}{\rho_{ACA} + \rho_{BCB}} \quad (2:3x)$$

För fri ände blir de transmitterade och reflekterade partikelhastigheterna

$$\frac{U_{pT}}{U_{pI}} = 2, \text{ transmitterad} \quad (2:3y)$$

respektive

Splitterverkan

$$\frac{U_{pR}}{U_{pI}} = 1, \text{ reflekterad} \quad (2:3z)$$

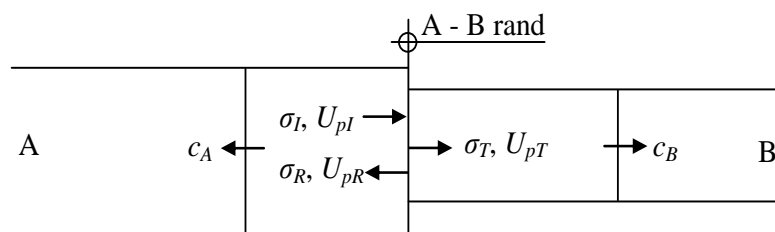
och för fix ände blir partikelhastigheterna

$$\frac{U_{pT}}{U_{pI}} = 0, \text{ transmitterad} \quad (2:3aa)$$

respektive

$$\frac{U_{pR}}{U_{pI}} = -1, \text{ reflekterad} \quad (2:3ab)$$

För diskontinuerliga tvärsnitt kan på motsvarande sätt härledas uttryck för att beräkna infallande, reflekterande och transmitterande spänningar och partikelhastigheter enligt modell i figur 2:3b.



Figur 2:3b. Schematisk bild av en longitudinell spänningsvåg som rör sig från vänster till höger och reflekterar mellan två medium A och B, där tvärsnittsarean mellan dessa två medium varierar.

Jämviktssamband ger, jämför 2:3h:

$$A_A(\sigma_I + \sigma_R) = A_B\sigma_T \quad (2:3ac)$$

där A_A och A_B är tvärsnitts area för stav A respektive stav B.

Kontinuitetsvillkor ger enligt 2:3i

$$U_{pI} + U_{pR} = U_{pT} \quad (2:3ad)$$

Lös ut den reflekterade spänningen ur ekvation (2:3ac) och insättning i ekvation (2:3m) ger uttryck för den transmitterade spänningen

$$\frac{\sigma_I}{\rho_A c_A} - \frac{1}{\rho_A c_A} \left(\frac{A_B}{A_A} \sigma_T - \sigma_I \right) = \frac{\sigma_T}{\rho_B c_B} \quad (2:3ae)$$

förenkla och uttrycket för den transmitterade spänningen blir

$$\sigma_T = \frac{2A_A\rho_B c_B}{A_A\rho_A c_A + A_B\rho_B c_B} \sigma_I \quad (2:3af)$$

på motsvarande sätt fås uttryck för den reflekterade spänningen genom att lösa ut den transmitterade spänningen ur ekvation (2:3ac) och insättning i ekvation (2:3m)

$$\sigma_R = \frac{A_B \rho_B c_B - A_A \rho_A c_A}{A_A \rho_A c_A + A_B \rho_B c_B} \sigma_I \quad (2:3ag)$$

2:4 Elastisk stöt med vågpropagering

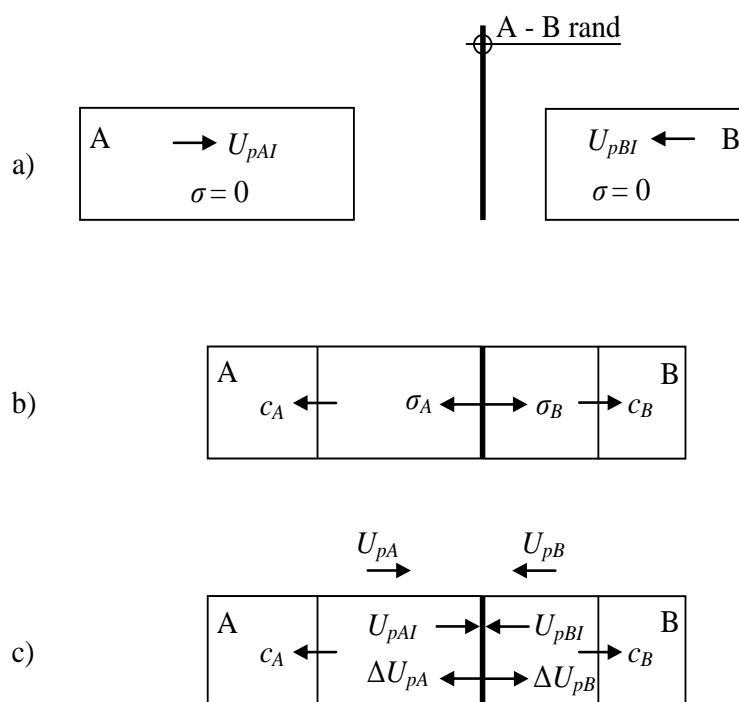
2:41 *Introduktion till elastisk stöt*

2:411 *Grundläggande samband till elastisk stöt*

Elastiska vågor behandlades i avsnitt 2.3, där två stavar med olika impedans satt ihop. Här studeras en elastisk stöt mellan två stavar, se figur 2:411a. Referensriktningen skiljer sig emot den klassiska stelkropps dynamiken, jämför avsnitt 2:22. I figur 2:411a:

- a) visar två stavar som är infallande mot randen A - B där de så småningom stöter emot varandra.
- b) visar ögonblicket då stavarna träffar varandra. I randen skall det råda kraftjämvikt, det vill säga spänningen är lika i båda stavarna.
- c) visar ögonblicket de träffar varandra. I randen skall det råda kontinuitet, det vill säga att vid ögonblick de träffar varandra så sitter stavarna ihop.

Splitterverkan



Figur 2:411a. Schematisk bild av två stavar som stöter emot varandra.

Innan stöt har alla partiklar i stav A samma partikelhastighet och rör sig med en hastighet U_{pAI} åt höger. Motsvarande gäller för stav B men här är hastigheten U_{pBI} åt vänster.

Relativ hastighet v_R mellan stavarna är summan av hastigheterna eftersom de rör sig i motsatt riktning:

$$v_R = U_{pAI} + U_{pBI} \quad (2:411a)$$

Spänningen i båda stavarna i luften innan de stöter emot varandra är noll. I figur 2:411a b) stöter stavarna i varandra och en tryckt spänningsvåg genereras i randen A - B. Figur 2:411a c) visar hur partikelhastigheterna blir direkt efter stöten.

Jämvikt skall råda vid randen A - B, vilket ger:

$$\sigma = \sigma_A = \sigma_B \quad (2:411b)$$

enligt ekvation (2:3e) kan spänningen skrivas om som:

$$\rho_A c_A \Delta U_{pA} = \rho_B c_B \Delta U_{pB} \quad (2:411c)$$

där ΔU_{pA} och ΔU_{pB} betecknar ändring i partikelhastighet. Spänningsamplituden beror därmed på ändringen i partikelhastighet hos de båda stavarna. Partikelhastigheten hos stav A och stav B efter stöt blir ursprungliga hastigheten minus ändring i partikelhastighet och tecknas som:

Splitterverkan

$$U_{pA} = U_{pAI} - \Delta U_{pA} \quad (2:411d)$$

$$U_{pB} = U_{pBI} - \Delta U_{pB} \quad (2:411e)$$

Kontinuitetsvillkor för partikelhastigheterna, det vill säga att stavarna sitter ihop, ger:

$$U_{pA} = -U_{pB} \quad (2:411f)$$

Genom att kombinera ekvationerna (2:411d), (2:411e) och (2:411f) fås:

$$U_{pAI} + U_{pBI} = \Delta U_{pA} + \Delta U_{pB} \quad (2:411g)$$

där den relativa hastigheten v_R mellan stav A och B kan tecknas som summan av ändring i partikelhastighet:

$$v_R = \Delta U_{pA} + \Delta U_{pB} \quad (2:411h)$$

Partikelhastigheten som är associerad till den tryckta spänningsvågen hos stav A och stav B direkt efter kollision kan beräknas genom insättning av ekvation (2:411h) i ekvation (2:411c), varvid fås:

$$\rho_A c_A \Delta U_{pA} = \rho_B c_B (v_R - \Delta U_{pA}) \quad (2:411i)$$

omskrivning ger:

$$\rho_A c_A \Delta U_{pA} + \rho_B c_B \Delta U_{pA} = \rho_B c_B v_R \quad (2:411j)$$

lös ut ändring i partikelhastighet för stav A:

$$\Delta U_{pA} = \frac{\rho_B c_B}{\rho_A c_A + \rho_B c_B} v_R \quad (2:411k)$$

På motsvarande sätt löses ändring i partikelhastighet hos stav B som

$$\Delta U_{pB} = \frac{\rho_A c_A}{\rho_A c_A + \rho_B c_B} v_R \quad (2:411l)$$

För att beräkna den verkliga hastigheten efter stöt mellan två stavar måste vågpropagering beaktas. Den verkliga hastigheten blir den infallande hastigheten i staven minus ändring i partikelhastighet. Vidare kan hastigheten påverkas av reflexioner, vilket exemplifieras i kommande avsnitt.

2:412 **Generellt fall**

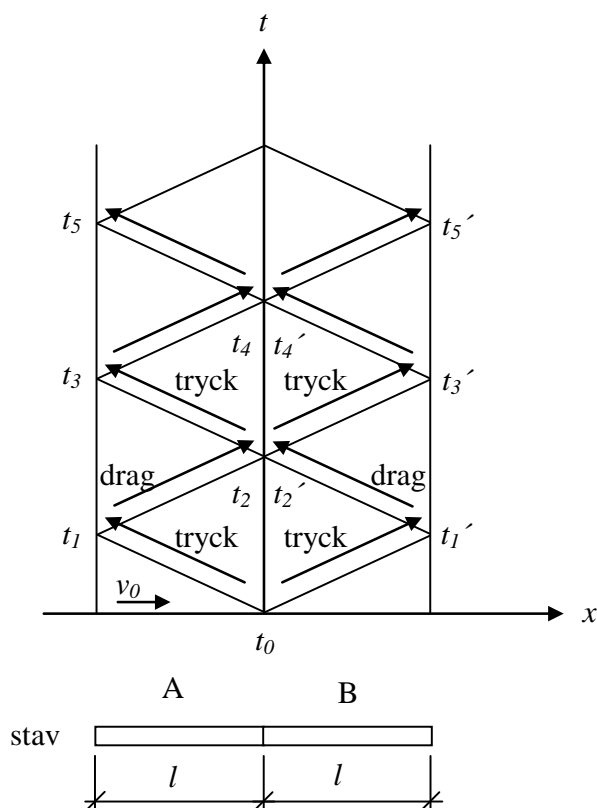
Nedan visas samband för ett generellt fall där våghastigheten sätts lika mellan två lika långa stavar som stöter emot varandra. Dock låter vi massan variera, på så sätt motsvarar detta klassisk stelkroppsdyamik där våghastighet och storlek på stavar ej beaktas.

Detta ger våghastigheten, $c_A = c_B$, och längden för stav A och B är lika. Låt stav B stå still och stav A träffar stav B med hastigheten v_0 . Låt densiteten för stav B vara:

$$\rho_B = n\rho_A \tag{2:412a}$$

där n är ett godtyckligt tal. En utförlig beskrivning av förloppet med $n = 1$ redogörs i avsnitt 2:43 där stöt med identiska stavar behandlas.

Här redogörs för en kortare härledning av ett generellt uttryck. Med ett Lagrangediagram kan en grafisk framställning göras av hur den en-dimensionella spänningstvågen propagerar med tiden, se figur 2:412a. Den horisontella axeln anger vågfrontens läge i staven och den vertikala axeln anger tiden.



Figur 2:412a. Lagrangediagram där spänningstvågen redovisas för två stavar som stöter emot varandra.

Splitterverkan

När stav A stöter emot stav B genereras vid tiden t_0 en tryckvåg i gränsskiktet mellan A och B. Denna tryckvåg vandrar åt vänster i stav A och åt höger i stav B. Vid tidpunkt t_1 för stav A och tidpunkt t_1' för stav B har tryckvågen nått den fria änden i stav A respektive stav B och reflekteras. Den reflekterade tryckvågen blir dragen eftersom det är en fri ände enligt ekvation (2:3t). Eftersom våghastighet c och längden l är lika för stav A och B, inträffar tiden t_1 och t_1' samtidigt, samt att tidpunkt och t_2' inträffar samtidigt. Den uppkomna dragvågen rör sig åter mot gränssytan A-B, vilket en når vid tiden t_2 . Vid denna tidpunkt fås också en separation mellan de två stavarna eftersom vi har en dragvåg i bägge stavarna. Därmed blir samtliga reflexioner efter tidpunkten t_2 som om reflexionen skulle ske mot en fri ände, vilket innebär att vid varje reflexion fås ett teckenbyte.

För att beräkna den slutgiltiga hastigheten räknar vi ut den relativa hastigheten och ändring i partikelhastighet. Enligt ekvation (2:411a) blir den relativa hastigheten:

$$v_R = U_{pAI} + U_{pBI} = v_0 + 0 = v_0 \quad (2:412b)$$

och enligt ekvation (2:411k) och (2:411l) fås ändring i partikelhastighet.

Med $c_A = c_B$ och $\rho_B = n\rho_A$.

$$\Delta U_{pA} = \frac{\rho_B c_B}{\rho_A c_A + \rho_B c_B} v_R = \frac{n\rho_A c_A}{\rho_A c_A + n\rho_A c_A} v_0 = \frac{n}{1+n} v_0 \quad (2:412c)$$

$$\Delta U_{pB} = \frac{\rho_A c_A}{\rho_A c_A + \rho_B c_B} v_R = \frac{\rho_A c_A}{\rho_A c_A + n\rho_A c_A} v_0 = \frac{1}{1+n} v_0 \quad (2:412d)$$

Stav A får en partikelhastighet i gränsskiktet på:

$$U_{pA} = U_{pAI} - \Delta U_{pA} \quad (2:412e)$$

och hastigheten i stav A minskar successivt till denna hastighet. När tryckvågen har nått tidpunkt t_1 , motsvarande vänstra änden i stav A, reflekterar denna. Vid denna reflexion fås ytterligare en ändring i partikelhastighet som är associerad till den tryckta vågen som orsakades när stav A träffade stav B. I och med att det är en fri ände blir enligt ekvation (2:3z) ändringen i partikelhastighet för den dragna vågen lika med ändring i partikelhastighet för den tryckta vågen.

Den verkliga hastigheten i staven blir den ursprungliga hastigheten U_{pAI} , vilket är v_0 , minus den som är associerad till den tryckta, samt minus den som är associerad till den dragna vågen. Denna hastighetsändring sker successivt bakom stötvågsfronten och vid tidpunkt t_2 separerar stav A och B. Den slutgiltiga hastigheten efter att stavarna har separerat för stav A blir:

$$U_{pA} = U_{pAI} - 2\Delta U_{pA} \quad (2:412f)$$

Splitterverkan

insättning av ekvation (2:412c) ger

$$U_{pA} = v_0 - 2 \frac{n}{1+n} v_0 = v_0 \left(1 - 2 \frac{n}{1+n}\right) \quad (2:412g)$$

vilket kan skrivas om som:

$$U_{pA} = v_0 \left(1 - 2 \frac{n}{1+n}\right) = v_0 \frac{1-n}{1+n} \quad (2:412h)$$

Stav B får slutgiltig hastighet på motsvarande sätt:

$$U_{pB} = U_{pBI} - 2\Delta U_{pB} \quad (2:412i)$$

insättning av ekvation (2:412d) ger

$$U_{pB} = 0 - 2 \frac{1}{1+n} v_0 = -\frac{2}{1+n} v_0, \text{ det vill säga att rör sig åt höger} \quad (2:412j)$$

Enligt klassisk stelkroppsdyamik med ekvation (2:22c) och (2:22d) blir hastigheten för stav A och stav B efter stöt då stav B inledningsvis står still:

$$v_{Ae} = v_{Af} \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} \quad (2:412k)$$

$$v_{Be} = \frac{2v_{Af}m_A}{m_A + m_B} \quad (2:412l)$$

eftersom stavarna är lika långa och $\rho_B = n \rho_A$ blir $m_B = n m_A$, insättning i 2:412k och 2:412l ger

$$v_{Ae} = v_{Af} \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} = v_{Af} \frac{1 - m_B/m_A}{1 + m_B/m_A} = v_0 \frac{1 - nm_A/m_A}{1 + nm_A/m_A} = v_0 \frac{1-n}{1+n} \quad (2:412m)$$

$$v_{Be} = \frac{2v_{Af}m_A}{m_A + m_B} = \frac{2v_{Af}}{1 + m_B/m_A} = \frac{2v_0}{1 + nm_A/m_A} = \frac{2}{1+n} v_0 \quad (2:412n)$$

jämför detta med ekvation (2:412h) och (2:412j). Observera att referensriktning skiljer sig åt för stav B med dessa två olika betraktelsesätt.

En enkel kontroll som alltid kan göras är om lagen om konservering av rörelsemängd är uppfylld.

$$m_A v_{Af} + m_B v_{Bf} = m_A v_{Ae} + m_B v_{Be} \quad (2:412o)$$

Vänsterled i ekvation (2:412o):

$$m_A v_{Af} + m_B v_{Bf} = m_A v_0 + 0 = m_A v_0 \quad (2:412p)$$

Högerled i ekvation (2:412o):

$$m_A v_0 \frac{1-n}{1+n} + n m_A \frac{2}{1+n} v_0 = m_A v_0 \frac{(1-n+2n)}{1+n} = m_A v_0 \quad (2:412q)$$

Vänsterled i ekvation (2:412o) = högerled i ekvation (2:412o), vilket visar att lagen om konservering av rörelsemängd är uppfyllt.

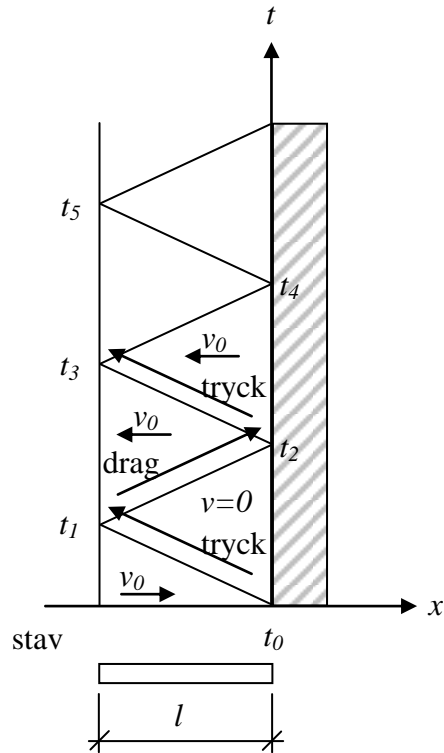
Sammanfattningsvis blir resultatet identiskt med klassisk stelkroppsdyamik när vågpropagering beaktas och våghastighet samt längd för båda stavar är lika.

Ifall våghastigheten mellan materialen skiljer sig åt eller längden hos de två stavarne inte är lika ger klassisk stelkroppsdyamik dock inte längre samma resultat. För att korrekt beskriva en generell stöt mellan två stavar måste således vågutbredning beaktas. Detta behandlas vidare i avsnitt 2:442 för lika material med varierande längder och i avsnitt Bilaga A:5 för olika material med samma längd.

2:42 Stöt mot en stel vägg

För att studera en stöt mot en stel vägg används Lagrangediagrammet i figur 2:42a, där den horisontella x-axeln anger vågfrontens läge i staven och den vertikala axeln anger tiden.

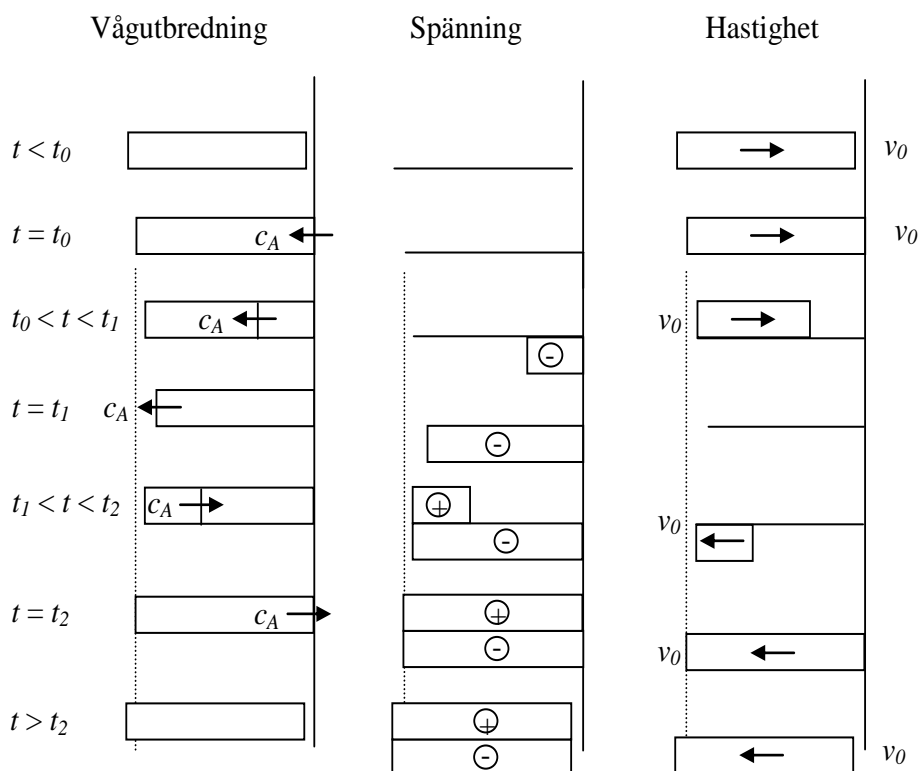
Splitterverkan



Figur 2:42a. Lagrangiandiagram för en stav som stöter emot en stel vägg (fix ände). Baserad på Zukas (1990).

I figur 2:42b följs steg för steg hur vågutbredningen, spänningen och hastigheten varierar efter stöt för staven i figur 2:42a. En viktig skillnad med jämförelse mellan stelkroppsdynamik är att spänningsfördelningen i staven varierar när vågutbredning beaktas.

Splitterverkan



Figur 2:42b. Vågutbredning, spänning och hastighet hos stav som träffar en stel vägg. Negativ spänning innebär tryck och tidpunkterna i figur motsvarar tidpunkterna i figur 2:42a.

$t < t_0$:

När staven färdas i luften på väg mot väggen är spänningen noll och hastigheten är v_0 .

$t = t_0$:

Staven träffar väggen med partikelhastigheten v_0 . Eftersom den högra änden av staven stannar får vi en ändring i partikelhastighet på v_0 enligt ekvation (2:3ab) eftersom det är en fix ände. En tryckt spänningsvåg propagerar till vänster, där spänningen blir:

$$\sigma = \rho c \Delta U_{pA} = \rho c v_0 \quad (2:42a)$$

$t_0 < t < t_1$:

För tidpunkt t_0 har enbart den högra änden av staven stannat, medan resten av staven "vet inte" om att den högra änden har stannat och kommer därmed att fortsätta med samma hastighet v_0 åt höger. Från den högra änden av staven, där den tryckta spänningsvågen genererades vid tidpunkt t_0 vandrar denna spänningsvåg åt vänster i staven med hastigheten c_A och reducerar successivt hastigheten i staven med till noll.

$t = t_1$:

Spänningsvågen når den vänstra änden av staven varmed hela stavens hastighet har reducerats till noll, är tryckt samt har förkortats.

Splitterverkan

$t_1 < t < t_2$:

Den tryckta spänningstågen reflekterar som en dragen våg i stavens vänstra ände. Eftersom det är en fri ände, kommer den tryckta spänningstågen bli en dragen spänningståg enligt ekvation (2:3t), samt kommer ändring i partikelhastighet i staven bli v_0 åt vänster enligt ekvation (2:3z). Det vill säga att precis efter tidpunkt t_1 börjar den vänstra delen av staven röra sig till vänster och återgå till sin ursprungliga längd. Den tryckta och den dragna vågen släcker ut varandra, därmed blir den vänstra delen av staven spänninglös.

$t = t_2$:

Den dragna vågen, som är på väg till höger når väggen.

$t > t_2$:

Eftersom en dragvåg inte kan transmittas till väggen, kommer den att reflekteras som om det vore en fri ände och därmed reflekteras den tillbaka som en tryckt våg. Den tryckta och den dragna vågen släcker ut varandra, alltså reduceras spänningen till noll i hela staven och staven rör sig åt vänster med hastigheten v_0 .

Jämförelse med klassisk stekroppsdynamik med ekvation (2:22c) där m_b går mot ∞ ger:

$$v_{Ae} = v_{Af} \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} = v_0 \frac{1 - \infty}{1 + \infty} \cong v_0 \frac{-\infty}{\infty} = -v_0 \quad (2:42b)$$

det vill säga att stav A rör sig åt vänster med samma hastighet som den träffade väggen. Själva väggen står still enligt ekvation (2:22d):

$$v_{Be} = \frac{2v_{Af}m_A}{m_A + m_B} = \frac{2v_{Af}}{1 + m_B/m_A} = \frac{2 \cdot v_0}{1 + \infty/1} = 0 \quad (2:42c)$$

Antag att "väggen" väger 1 000 kg istället och stav A väger 1 kg och rör sig in i väggen med hastigheten 20 m/s. Då blir hastigheten hos stav A efter stöten:

$$v_{Ae} = v_0 \frac{1 - 1000}{1 + 1000} = v_0 \frac{-999}{1001} \cong -0,998v_0 = 19,96m/s \quad (2:42d)$$

och väggen får en hastighet på:

$$v_{Be} = \frac{2v_{Af}m_A}{m_A + m_B} = \frac{2 \cdot v_0 \cdot 1}{1 + 1000} = \frac{2 \cdot v_0}{1001} = 0,002v_0 = 0,04m/s \quad (2:42e)$$

eftersom väggen sitter fast i ränderna kommer den att vibrera något för att därefter återgå till sin ursprungliga form.

2:43 Symmetrisk stöt

En symmetrisk stöt fås när två identiska stavar stöter emot varandra med samma hastighet v_0 . Den relativa hastigheten v_R mellan stavarna blir därmed $2 v_0$.

Eftersom densitet och våghastighet är identiska fås ändring i partikelhastighet med ekvationerna (2:411k) och (2:411l):

$$\Delta U_{pA} = \frac{\rho_B c_B}{\rho_A c_A + \rho_B c_B} v_R = \frac{1}{1+1} 2v_0 = v_0 \quad (2:43a)$$

$$\Delta U_{pB} = \frac{\rho_B c_B}{\rho_A c_A + \rho_B c_B} v_R = \frac{1}{1+1} 2v_0 = v_0 \quad (2:43b)$$

och partikelhastighet i gränsskiktet blir

$$U_{pA} = U_{pAI} - \Delta U_{pA} = v_0 - v_0 = 0 \quad (2:43c)$$

$$U_{pB} = U_{pBI} - \Delta U_{pB} = v_0 - v_0 = 0 \quad (2:43d)$$

det vill säga att stavarna får samma spänning och hastighet som om en av dessa stavar skulle träffa en stel vägg (fix ände) med samma hastighet v_0 .

Motsvarande med klassisk stelkroppsdyamik fås ekvationssystem med ekvationerna (A:11a) och (A:11f), se Bilaga A:1:

$$m_A v_{Af} + m_B v_{Bf} = m_A v_{Ae} + m_B v_{Be} \quad (2:43e)$$

$$v_{Be} - v_{Ae} = -(v_{Bf} - v_{Af}) \quad (2:43f)$$

Eftersom $m_a = m_b$, kan massorna i ekvation (2:43e) avlägsnas varvid:

$$v_0 + (-v_0) = v_{Ae} + v_{Be} \quad (2:43g)$$

vilket innebär att

$$v_{Ae} = -v_{Be} \quad (2:43h)$$

och insättning i ekvation (2:43f) ger

$$v_{Be} - (-v_{Be}) = -(-v_0 - v_0) \quad (2:43i)$$

vilket ger hastigheten v_{Be}

Splitterverkan

$$v_{Be} = v_0 \quad (2:43j)$$

och med ekvation (2:43h) fås hastigheten v_{Ae}

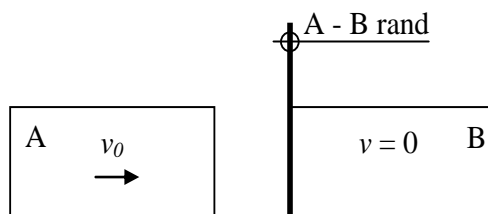
$$v_{Ae} = -v_0 \quad (2:43k)$$

det vill säga att stav A rör sig åt vänster och stav B åt höger med hastigheten v_0 .

2:44 Stöt mellan lika material

2:441 Identiska stavar

Två identiska stavar stöter emot varandra där den ena står stilla enligt figur 2:441a. Stavarna är identiska, det vill säga att densitet, våghastighet och längd är samma för båda stavarna och den första, stav A, har anslags-hastighet på v_0 .



Figur 2:441a. Stav A stöter emot stillastående stav B.

Den relativa hastigheten v_R är v_0 eftersom stav B står still. Den relativa partikelhastigheten kan även uttryckas som:

$$v_R = \Delta U_{pA} + \Delta U_{pB} \quad (2:441a)$$

Eftersom stav B står still innan stöt blir ändring i partikelhastighet lika ΔU_{pB} och stav A får en ändring i partikelhastighet enligt ekvation (2:441a):

$$\Delta U_{pA} = v_R - \Delta U_{pB} = v_0 - \Delta U_{pB} \quad (2:441b)$$

Jämvikt skall råda vid gränsskiktet mellan materialen, det vill säga:

$$\sigma = \rho_A c_A \Delta U_{pA} = \rho_B c_B \Delta U_{pB} \quad (2:441c)$$

Förkorta bort densitet och våghastighet eftersom dessa är lika, insättning av ekvation (2:441b) ger:

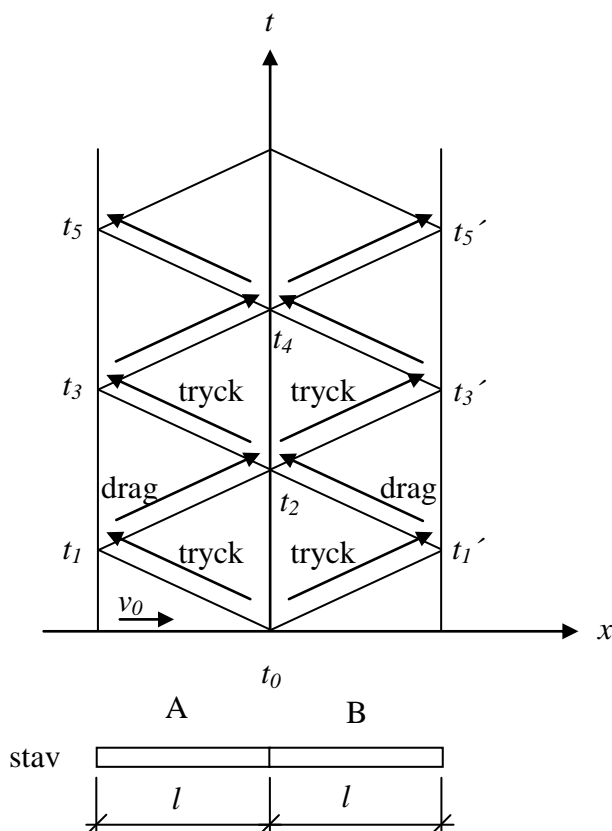
$$v_0 - \Delta U_{pB} = \Delta U_{pB} \Rightarrow \Delta U_{pB} = \frac{v_0}{2} \quad (2:441d)$$

Splitterverkan

och

$$\Delta U_{pA} = v_0 - \Delta U_{pB} = \frac{v_0}{2} \quad (2:441e)$$

Observera att samma resultat fås med ekvation (2:411k) och (2:411l). I figur 2:441b visas med ett Lagrangediagram hur spänningsvågen reflekterar för stav A och B.



Figur 2:441b. Lagrangediagram för en stav som stöter emot en stillastående stav.

Den associerade partikelhastigheten till den tryckta spänningsvåg som vandrar åt vänster i stav A blir $v_0/2$. I gränsskiktet blir hastigheten hos stav A dock ursprungshastighet minus partikelhastigheten associerad till den tryckta vågen, det vill säga:

$$U_{pA} = U_{pAI} - \Delta U_{pA} = v_0 - \left(v_0 - \frac{v_0}{2} \right) = \frac{v_0}{2} \quad \text{åt höger} \quad (2:441f)$$

vilket innebär att stav A rör sig åt höger med hastigheten $v_0/2$. Stav B får en ändring i partikelhastighet på $v_0/2$, se ekvation (2:441d). Eftersom stav B inte hade någon hastighet innan stöten blir hastigheten i gränsskiktet lika med partikelhastigheten $v_0/2$.

Splitterverkan

Den tryckta spänningsvågen i stav A vandrar nu mot vänstra änden av stav A och när den reflekteras fås en dragvåg med associerad partikelhastighet till denna. Den verkliga hastigheten U_{PA} blir den ursprungliga U_{PAI} minus den som är associerad till den tryckta, samt minus den som är associerad till den dragna vågen:

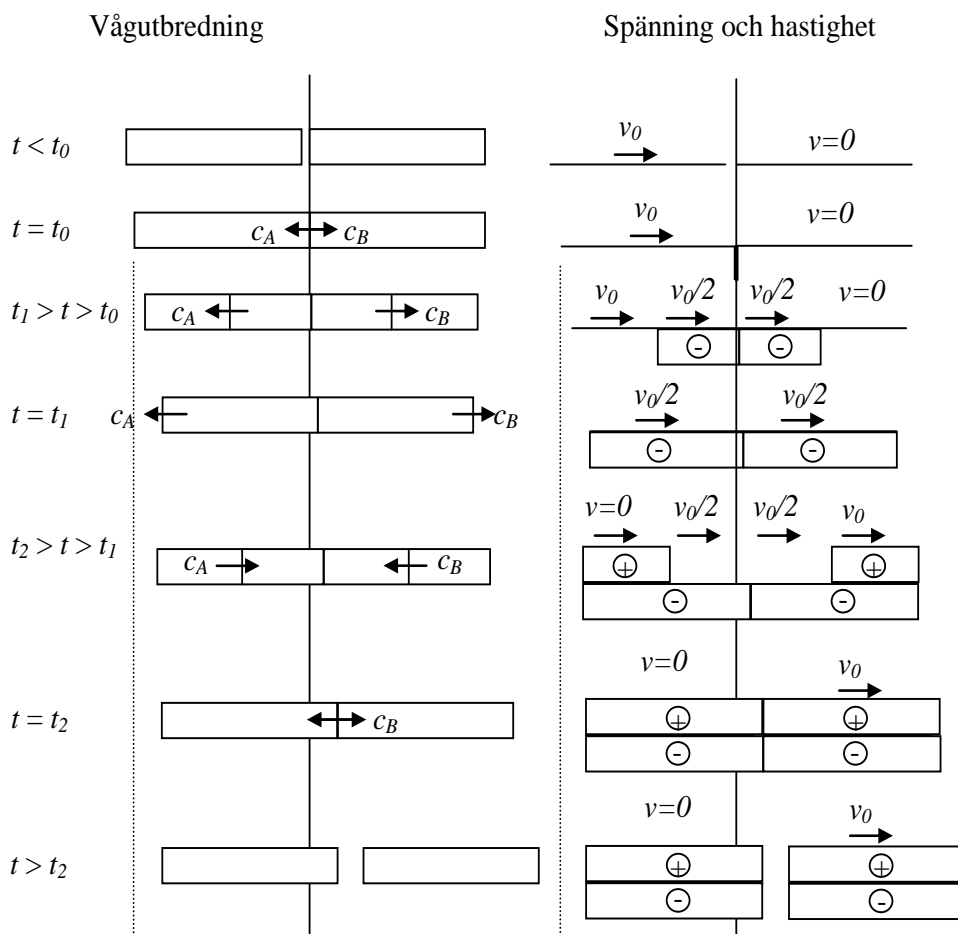
$$U_{PA} = v_0 - \left(v_0 - \frac{v_0}{2}\right) - \left(v_0 - \frac{v_0}{2}\right) = 0 \quad (2:441g)$$

Stav A stannar således när dragvågen har nått den högra änden av stav A, eftersom dragvågen inte kan transmittas till stav B.

Direkt efter stöten har stav B en partikelhastighet associerad till den tryckta vågen på $v_0/2$ som också är den riktiga hastigheten eftersom stav B stod stilla innan stöt. Dock, när den tryckta vågen når den högra änden av staven reflekteras den till en dragvåg med en associerad hastighet på $v_0/2$. Den totala hastigheten blir summan av den som är associerad till den tryckta och den som är associerad till den dragna vågen. Därmed blir den slutgiltiga hastigheten i stav B lika med v_0 .

Sammanfattningsvis: stav A stöter emot en stillastående stav B med en hastighet på v_0 . Båda stavarna rör sig direkt efter stöten åt höger med en hastighet på $v_0/2$. Vid detta tillfälle har dock inga reflexioner skett ännu i stavarna, vilket påverkar deras slutgiltiga hastighet. I det slutgiltiga läget stannar stav A medan stav B rör sig åt höger med hastigheten v_0 . Detta kan illustreras i figur 2:441c där vågutbredning, spänning och hastighet hos stavarna visas för de olika tidpunkterna.

Splitterverkan



Figur 2:441c. Vågutbredning, spänning och hastighet hos två identiska stavar som stöter emot varandra.

I figuren 2:441c är rörelserna överdrivna för att illustrera den relativa rörelsen hos de två stavarna. I verkligheten är tiden så kort för vågen att propagera fram och tillbaka i staven att stavarnas rörelse inte går att uppfatta med ögat. Exempelvis om $v_0 = 20$ m/s och stavarna skulle vara av stål, med antagen våghastighet på ca 6 000 m/s. För 10 cm långa stavar skulle dessa två stavar vara i kontakt med varandra $0,10/6\,000 = 1,7 \cdot 10^{-5}$ s. I gränsskiktet är partikelhastigheten $v_0/2 = 10$ m/s, vilket innebär att stav A under denna tidsperiod förflyttar sig $1,7 \cdot 10^{-5} \cdot 10 = 1,7 \cdot 10^{-4}$ m, vilket är lika med 0,17 mm.

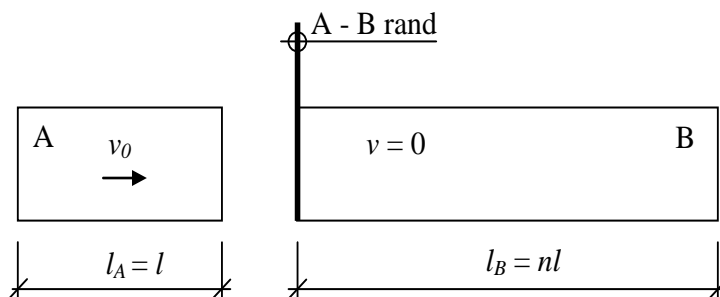
Återigen en jämförelse med klassisk stelkroppsdyamik ger samma resultat, enligt ekvation (2:22c) och (2:22d), med $m_B = m_A$ fås:

$$v_{Ae} = v_{Af} \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} = v_0 \frac{1-1}{1+1} = 0 \quad (2:441h)$$

$$v_{Be} = \frac{2v_{Af}m_A}{m_A + m_B} = \frac{2v_0}{1+1} = v_0 \quad (2:441i)$$

2:442 Olika längder på stavar

I föregående avsnitt jämfördes två identiska stavar. Här studeras två stavar som stöter emot varandra av samma material men med varierande längder enligt figur 2:442a. Stav A har längden l , medan stav B har längden nl . Stav A träffar den stillastående staven B med hastigheten v_0 .



Figur 2:442a. Stav A stöter emot stillastående stav B.

Den relativa hastigheten v_R blir v_0 eftersom stav B står still.

Densitet och våghastighet är densamma för stav A och B, det vill säga $\rho_A = \rho_B$ och $c_A = c_B$. Ändring i partikelhastighet hos stavarna kan beräknas enligt ekvation (2:411k) och (2:411l):

$$\Delta U_{pA} = \frac{\rho_B c_B}{\rho_A c_A + \rho_B c_B} v_R = \frac{1}{1+1} v_0 = \frac{1}{2} v_0 \quad (2:442a)$$

$$\Delta U_{pB} = \frac{\rho_B c_B}{\rho_A c_A + \rho_B c_B} v_R = \frac{1}{1+1} v_0 = \frac{1}{2} v_0 \quad (2:442b)$$

och partikelhastighet i gränsskiktet blir

$$U_{pA} = U_{pAI} - \Delta U_{pA} = v_0 - \frac{1}{2} v_0 = \frac{1}{2} v_0 \quad (2:442c)$$

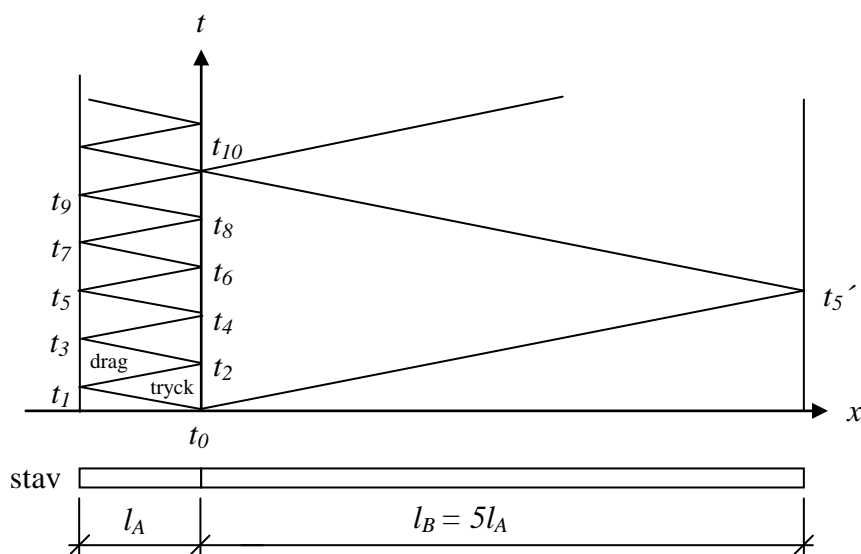
$$U_{pB} = U_{pBI} - \Delta U_{pB} = 0 - \frac{1}{2} v_0 = -\frac{1}{2} v_0 \quad (2:442d)$$

det vill säga att hastigheten i gränsskiktet för båda stavarna blir $v_0/2$ åt höger. Det kan noteras att detta är samma resultat som i avsnitt 2:441 för två identiska stavar. Den initiala partikelhastigheten blir således densamma oavsett stavarnas längd. Detta eftersom stavarna inte vet initieellt hur långa de är. Den slutgiltiga hastigheten styrs av materialet och längden hos stavarna.

Låt längden för stav B vara n gånger längden för stav A. För $n = 1$ fås två identiska stavar, vilket behandlades i avsnitt 2:441. Studera fallet n större än

Splitterverkan

ett. Exempelvis för $n = 5$ kan ett Lagrangediagram ställas upp enligt figur 2:442b. Eftersom materialen är lika hinner vågen studsa fram och tillbaka fem gånger i stav A innan vågen studsar tillbaka en gång i stav B.



Figur 2:442b. Lagrangediagram för en stav som stöter emot en stillastående stav som är fem gånger längre.

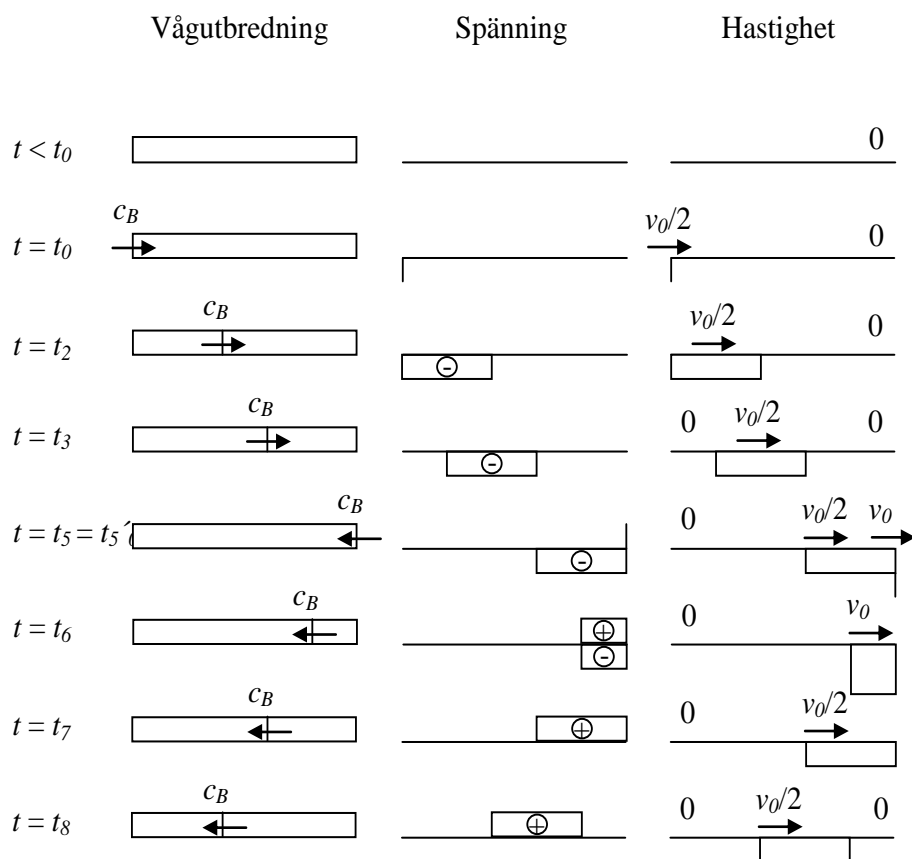
Studera först rörelsen för stav A. Vid tidpunkt t_1 reflekterar tryckvågen som genererades vid tidpunkt t_0 i diagrammet, hastigheten i staven i detta ögonblick blir således den initiella hastigheten hos staven minus den associerad till tryckvågen, samt minus den associerad till dragvågen:

$$U_{pA} = U_{pAI} - 2\Delta U_{pA} = v_0 - 2\frac{1}{2}v_0 = 0 \quad (2:442e)$$

Hastigheten reduceras successivt till noll i staven när den reflekterade dragvågen rör sig mot tidpunkten t_2 i Lagrangediagrammet. Vid tidpunkt t_2 kommer hastigheten för stav A att vara noll, samt kommer en tryck- och dragvåg vandra fram och tillbaka, dock släcker dessa ut varandra och spänningen i stav A blir noll.

Studera stav B där längden är fem gånger längre än för stav A. Under tiden mellan tidpunkt t_0 och t_2 i Lagrangediagrammet genereras en tryckvåg i stav B som vandrar åt höger. Efter tidpunkt t_2 genereras ingen tryckvåg längre till stav B, eftersom spänningen i stav A har släckts ut till noll. Figur 2:442c visar hur spänning och hastigheten varierar i stav B.

Splitterverkan



Figur 2:442c. Vågutbredning, spänning och hastighet hos stav B.

I gränsskiktet får stav B hastigheten $v_0/2$ enligt ekvation (2:442d). När den reflekterade dragvågen i stav A har nått tillbaka till punkt B har tryckvågen i stav B hunnit fram två femtedelar av dess längd. Vid denna tidpunkt har inte tryckvågen nått den högra delen av staven och hastigheten i denna sida är därmed noll. Eftersom dragvågen i stav A inte kan transmittas till stav B kommer hastigheten att återgå till noll i stav B efter att den tryckta spänningvågen har passerat.

I randen vid tidpunkt t_6 reflekteras den tryckta vågen och en dragvåg genereras. När tryck- och dragvågen överlappar varandra blir den totala hastigheten i denna del av staven den ursprungliga hastigheten minus den som är associerad till tryckvågen, samt minus den som är associerad till dragvågen enligt följande:

$$U_{pB} = U_{pBI} - 2\Delta U_{pB} = 0 - 2 \frac{1}{2} v_0 = v_0 \quad (2:442f)$$

Vid tidpunkt t_6 efter att tryckvågen har reflekterats helt reduceras hastigheten till:

$$U_{pB} = U_{pBI} - \Delta U_{pB} = 0 - \frac{1}{2} v_0 = -\frac{1}{2} v_0 \quad (2:442g)$$

Splitterverkan

Eftersom två femtedelar av staven har hastigheten $v_0/2$ och tre femtedelar har hastigheten noll kommer hastigheten i stav B av en betraktare att uppfattas som:

$$U_{pB} = U_{pBI} - \Delta U_{pB} = 0 - \frac{0 \cdot 3 + 2 \cdot \frac{1}{2} v_0}{5} = -\frac{1}{5} v_0 \quad \text{åt höger} \quad (2:442h)$$

En kontroll av lagen om rörelsemängdens bevarande ger:

$$m_A U_{pAI} + m_B U_{BI} = m_A U_{pA} + m_B U_{pB} \quad (2:442i)$$

Vänsterled i ekvation (2:442h) blir:

$$m_A v_0 + 0 = m_A v_0 \quad (2:442j)$$

Högerled i ekvation (2:442h) blir:

$$0 + 5m_A \frac{v_0}{5} = m_A v_0 \quad (2:442k)$$

Sammanfattningsvis, för $n \geq 1$ blir hastigheten alltid noll för stav A och hastigheten för stav B uppfattas som:

$$U_{pB} = U_{pBI} - \Delta U_{pB} = \frac{v_0}{n} \quad (2:442l)$$

Jämförelse med klassisk stelkroppsdyamik visas i tabell 2:442a. Stav B har massan $m_B = nm_A$ eftersom tvärsnittsarean och densiteten är densamma hos båda stavarna.

Tabell 2:442a. Jämförelse med klassisk stelkroppsdyamik och elastisk stöt där vågutbredning beaktas för olika stavlängder.

Längdkvot n	Elastisk stöt		Klassisk stelkroppsdyamik	
	$U_{pA} [-v_0]$	$U_{pB} [-v_0]$	$v_{Ae} [-v_0]$	$v_{Be} [-v_0]$
1	0	-1	0	1
2	0	-1/2	-1/3	2/3
4	0	-1/4	-1/2	1/2
5	0	-1/5	-3/5	2/5
10	0	-1/10	-0,818	0,182
1 000	0	-1/1 000	-0,998	0,002
∞	0	0	-1	0

* Referensriktning skiljer sig åt. Jämför tabell 2:5a.

Splitterverkan

Skillnaden är stor då en jämförelse mellan klassisk stelkroppsdynamik görs. Exempelvis i fallet då stav B är mycket längre än stav A blir hastigheten för stav A nästan samma som anslagshastigheten med klassisk stelkroppsdynamik, medan hastigheten för stav A blir noll då vågpropagering beaktas. För att förklara varför det blir skillnad i resultat i jämförelse med klassisk stelkroppsdynamik återgå till ekvation (2:3a).

$$E_f + m_A \frac{v_{Af}^2}{2} + m_B \frac{v_{Bf}^2}{2} = E_e + m_A \frac{v_{Ae}^2}{2} + m_B \frac{v_{Be}^2}{2} + W \quad (2:442m)$$

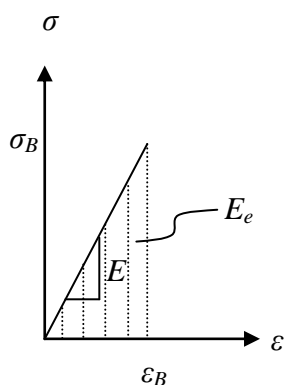
där energi, E_f och E_e beteckningar energi före och efter. Antag att förlusterna är noll och inget yttre arbete W har utförts. Före stöt är den inre potentiella energin (töjningsenergin) noll eftersom spänningen är noll i båda stavar, vilket ger vänster led i ekvation (2:442m):

$$E_f + m_A \frac{v_{Af}^2}{2} + m_B \frac{v_{Bf}^2}{2} = 0 + m_A \frac{v_0^2}{2} + 0 = m_A \frac{v_0^2}{2} \quad (2:442n)$$

Efter stöt stannar stav A och dess spänning återgår till noll. För alla tidpunkter efter att stav A har stannat har all energi transmitterats till stav B. Den sammanlagda energin i stav B består av rörelseenergi och töjningsenergi. Studera exempelvis figur 2:442c vid tidpunkt t_2 . Högerled i ekvation (2:442m) blir:

$$E_e + m_A \frac{v_{Ae}^2}{2} + m_B \frac{v_{Be}^2}{2} + W = E_e + 0 + m_B \frac{v_{Be}^2}{2} + 0 = E_e + m_B \frac{v_{Be}^2}{2} \quad (2:442o)$$

Elasticitetsteorin ger att töjningsenergin (inre elastisk energi) är arean under spänning-töjningskurvan enligt figur 2:442d:



Figur 2:442d. Elastisk töjningsenergi E_e där E anger elasticitetsmodulen.

Töjningsenergin i högerled i ekvation (2:442o) blir:

$$E_e = \int_0^V \frac{1}{2} \sigma_B \varepsilon_B dV = \int_0^V \frac{1}{2} \sigma_B \frac{\sigma_B}{E} dV = \int_0^V \frac{\sigma_B^2}{2E} dV \quad (2:442p)$$

Splitterverkan

Våghastigheten för ett endimensionellt fall kan uttryckas som:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2:442q)$$

där E är elasticitetsmodulen och ρ är densitet. Lös ut elasticitetsmodulen genom att kvadrera båda leden och multiplicera med densiteten:

$$E = \rho c^2 \quad (2:442r)$$

Vid tidpunkt t_2 är endast längden $2L_A$ (två femtedelar av stav B) tryckt. Sätt $\rho = \rho_A = \rho_B$ och $c = c_A = c_B$, då fås spänningen i den tryckta delen av staven:

$$\sigma_B = \rho_B c_B \Delta U_{pB} = \frac{1}{2} \rho c v_0 \quad \text{och } 0 \text{ framför vågfronten} \quad (2:442s)$$

Insättning av ekvationerna (2:442q), (2:442r) och (2:442s) i ekvation (2:442p) ger:

$$E_e = \int_0^v \frac{\sigma_B^2}{2E} dv = \int_0^{\frac{2}{5}L_B} \frac{\left(\frac{1}{2} \rho c v_0\right)^2}{2\rho c^2} AL_B + \int_{\frac{2}{5}L_B}^{L_B} \frac{0}{2\rho c^2} AL_B = \frac{2}{5} \frac{\rho v_0^2}{8} L_B A \quad (2:442t)$$

där A är tvärsnittsarean. Uttryck massan som densitet multiplicerat med volym:

$$m_A = \rho L_A A \quad (2:442u)$$

Insättning ger töjningsenergin, nyttja att $L_B = 5L_A$, då fås:

$$E_e = \frac{2}{5} \frac{\rho v_0^2}{8} L_B A = \frac{2}{5} \frac{\rho v_0^2}{8} 5L_A A = \frac{1}{2} m_A \frac{v_0^2}{2} \quad (2:442v)$$

Kinetisk energi i högerled i ekvation (2:442o) blir, då två femtedelar av staven har hastigheten $v_0/2$ och tre femtedelar av staven har hastigheten noll:

$$m_B \frac{v_{Be}^2}{2} = \frac{2}{5} m_B \frac{\left(\frac{v_0}{2}\right)^2}{2} + \frac{3}{5} \cdot 0 = \frac{2}{5} 5m_A \frac{v_0^2}{4 \cdot 2} = \frac{1}{2} m_A \frac{v_0^2}{2} \quad (2:442w)$$

Summera ekvation (2:442v) och (2:442w) vilket ger högerledet i ekvation (2:442o):

$$E_e + 0 + m_B \frac{v_{Be}^2}{2} + 0 = \frac{1}{2} m_A \frac{v_0^2}{2} + \frac{1}{2} m_A \frac{v_0^2}{2} = m_A \frac{v_0^2}{2} = VL \quad (2:442x)$$

Splitterverkan

där $VL =$ vänsterled enligt ekvation (2:442n), det vill säga rörelseenergin i stav A har transmitterats till stav B där energin är dels rörelseenergi och dels töjningsenergi. Den tryckta vågen fortsätter att vandra vidare åt höger i stav B och staven kommer att få en ojämn spänningsfördelning (i praktiken med vibrationer som följd). Detta visar att klassisk stelkroppsdyamik inte kan lösa generella problem för stötar där spänningsfördelningen blir ojämn. För generella lösningar för stöt mellan två stavar måste vågpropagering och den inre töjningsenergin beaktas enligt ekvation (2:3a).

Dock kommer stavens hastighet att utjämnas sig till $v_0/5$ åt höger med tiden enligt ekvation (2:442g).

Som kontroll, studera tidpunkt t_6 där spänningen är noll i staven och därmed töjningsenergin noll i hela staven. Den kinetiska energin består av att endast en femtedel av stav B är i rörelse med hastigheten v_0 , vilket blir:

$$\frac{1}{5} m_B \frac{v_0^2}{2} + \frac{4}{5} m_B \frac{0^2}{2} = \frac{1}{5} 5m_A \frac{v_0^2}{2} + 0 = m_A \frac{v_0^2}{2} = VL \quad (2:442y)$$

där $VL =$ vänsterled, det vill säga att jämvikt råder, jämför ekvation (2:442n).

Energibetraktelse fungerar alltid för samtliga fall, där totala energin vid varje tidpunkt är den kinetiska energin plus töjningsenergi. Studera exempelvis fallet då en stav stöter emot en fix vägg i avsnitt 2:42. Staven hade en hastighet på v_0 när den träffade väggen. Vid tidpunkt t_1 , se figur 2:42a stannade staven och hela staven var tryckt.

Spänningen i staven är vid denna tidpunkt:

$$\sigma_B = \rho_A c_A \Delta U_{\rho A} = \rho c v_0 \quad (2:442z)$$

Töjningsenergin E_e är enligt ekvation (2:532m):

$$E_e = \int_0^v \frac{\sigma^2}{2E} dv = \int_0^v \frac{(\rho c v_0)^2}{2\rho c^2} dv = \int_0^v \frac{1}{2} \rho v_0^2 dv = \frac{1}{2} \rho v_0^2 LA \quad (2:442aa)$$

stavens massa är densitet multiplicerat med dess volym vilket ger:

$$E_e = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (2:442ab)$$

Eftersom staven står stilla vid denna tidpunkt är den kinetiska energin noll. Därmed har all kinetisk energi omvandlats till töjningsenergi i staven. Den kinetiska energin var enligt ekvation (2:21h):

$$E_k = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (2:442ac)$$

Dock omvandlas all töjningsenergin till kinetisk energi i detta fall. Och staven som träffade den stela väggen studsar tillbaks med samma hastighet som den träffade väggen.

2:5 Stötvågsparametrar

När två stavar träffar varandra med mycket hög hastighet kommer materialets hållfasthet att överskridas avsevärt och stöten kan betraktas som ett stötvågsfenomen. En stötvåg är en kraftig tryckvåg som passerar genom ett medium, där trycket ökar språngvis från ett lågt till ett högt eller mycket högt tryck.

När en stötvåg passerar genom ett medium blir det komplicerat. Det behövs ytterligare begrepp för att kunna beräkna denna typ av förlopp; begrepp som materialets tillståndsekvation blir viktigt.

De grundläggande antaganden som gäller för en stötvåg är följande:

- tryckökningen är språngvis
- skjuvhållfastheten i materialet antas vara noll, vilket innebär att teorin begränsas till höga tryck
- materialet beskrivs med en tillståndsekvation
- materialet genomgår ingen fasomvandling

Vid snabb belastning ökar hållfastheten i materialet på grund av töjningshastighetseffekten, den ökade hållfastheten benämns dynamisk hållfasthet och beskrivs mer i detalj i kapitel 4. Med höga tryck menas att trycket är avsevärt högre än den dynamiska hållfastheten för materialet och skjuvhållfastheten kan försummas. Eftersom trycket är ett tri-axiellt spänningstillstånd beskrivs materialet med dess tillståndsekvation istället för den normala spännings-töjningskurvan som materialet beskrivs med för statisk belastning, se avsnitt 4:42. Detta innebär också att det inte finns något elastoplastiskt beteende hos materialet. Exempelvis ett stål med flythållfasthet på 500 MPa når aldrig flytning även om trycket är betydligt högre än 500 MPa.

De tre grundläggande sambanden i stötvågsberäkningar som sammanfattar stötvågsparametrar är konservering av massa, konservering av rörelsemängd och konservering av energi. Dessa samband finns härledda i Bilaga A:2.

Splitterverkan

Konsivering av massa:

$$\rho_0 U_s = \rho(U_s - U_p) \quad (2:5a)$$

Konsivering av rörelsemängd:

$$(P - P_0) = \rho_0 U_s U_p \quad (2:5b)$$

Konsivering av energi:

$$E - E_0 = \frac{1}{2}(P + P_0)\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho}\right) \quad (2:5c)$$

Specifik volym v definieras som:

$$v = \frac{1}{\rho} \quad (2:5d)$$

och med nyttjande av detta kan ekvation (2:5c) skrivas om som:

$$E - E_0 = \frac{1}{2}(P + P_0)(v_0 - v) \quad (2:5e)$$

Konsivering av massa, rörelsemängd och energi ger tre ekvationer, men vi har fem obekanta stötvågsp parametrar: tryck P , partikelhastighet U_p , stötvågshastighet U_s , densitet ρ och energi E . För att få information för en given parameter behövs en fjärde ekvation för att ta fram övriga stötvågsp parametrar. Detta samband benämns som tillståndsekvation och uttrycks ofta som ett samband mellan tryck och densitet, alternativt som ett samband mellan stötvågshastighet och partikelhastighet.

Tillståndsekvationen benämns även EOS, vilket är förkortning från det engelska uttrycket "Equation Of State". Sambandet mellan stötvågshastighet och partikelhastighet kan för många fasta material beskrivas med en polynomisk funktion:

$$U_s = C_0 + S_1 U_p + S_2 U_p^2 + \dots \quad (2:5f)$$

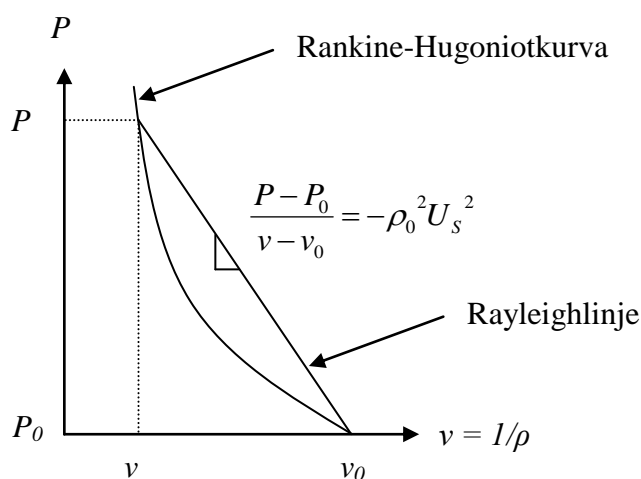
där S_1 och S_2 är materialkonstanter vilka är empiriskt framtagna. C_0 är våghastigheten för materialet för elastiskt material. Värderna för C_0 och S_1 finns tabulerade i litteraturen för olika material, se exempelvis Meyers (1994). När dessa väl är kända kan olika samband för stötvågsp parametrar tas fram med ekvationerna (2:5a-2:5c) och (2:5g). I avsnitt 4:42 visas samband mellan stötvågsp parametrarna U_s och U_p för några vanliga metaller. För porösa material, exempelvis betong, blir tillståndsekvationen dock olinjär redan vid låga tryck och kan ej beskrivas med ett linjärt samband, se vidare i avsnitt 4:4. För metaller kan S_2 sättas till noll, vilket stämmer ganska väl upp till

relativt höga tryck, vilket leder till att tillståndsekvationen blir ett linjärt samband enligt följande:

$$U_s = C_0 + S_1 U_p \quad (2:5g)$$

Konsivering av energi enligt ekvation (2:5c) kan representeras som ett samband mellan tryck och densitet eller som tryck och specifik volym, vilket visas i figur 2:5b. Detta samband gäller precis bakom stötvågsfronten och är känd som Rankine-Hugoniotkurvan. Observera att kurvan inte beskriver hur trycket varierar bakom en enskild stötvågsfront utan beskriver materialresponsen för det aktuella mediet. När stötvågsfronten passerar mediet fås ett distinkt hopp i trycket från P_0 till P medan specifik volym minskar från v_0 till v . Lutningen från punkten (P_0, v_0) till punkten (P, v) är en rät linje enligt ekvation (2:5h) och benämns Rayleighlinjen, härledning av denna återfinns i Bilaga A:3:

$$\frac{P - P_0}{v - v_0} = -\rho_0^2 U_s^2 \quad (2:5h)$$



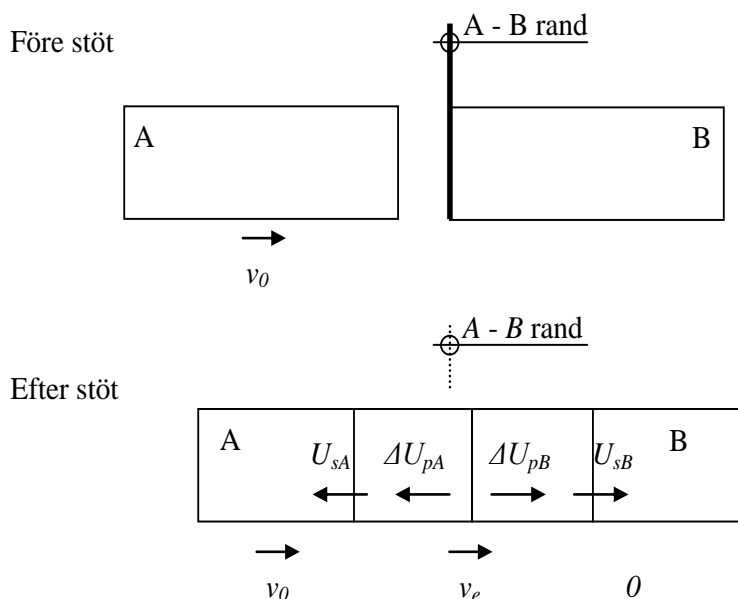
Figur 2:5a. Rankine-Hugoniot kurvan och Rayleighlinjen.

2:6 Plastisk stöt med stötvågsparametrar

En kraftig stöt kan generera en stötvågsfront, exempelvis när en splitter-svärm eller en projektil träffar en vägg. I detta avsnitt studeras fullständigt plastiska stötar där materialets dynamiska hållfasthet överskrids. Med dynamisk hållfasthet menas att materialet får en högre hållfasthet om den belastas snabbt, detta behandlas vidare i kapitel 4. Vidare begränsas stötar till material med linjär tillståndsekvation, exempelvis metaller.

Studera figur 2:6a där två stavar stöter emot varandra. Stav A träffar den stillastående staven B med hastigheten v_0 .

Splitterverkan



Figur 2:6a. Plastisk stöt mellan två stavar.

Före stöten har stav A hastigheten v_0 och stav B står still. Vid stöt mellan stav A och stav B bildas en stötvågsfront som vandrar till vänster i stav A med stötvågshastigheten U_{sA} och till höger i stav B med stötvågshastigheten U_{sB} . Ändring i partikelhastigheten bakom stötvågsfronten för stav A blir ΔU_{pA} och för stav B ΔU_{pB} . Jämvikt skall råda vid randen, vilket ger att:

$$P_A = P_B \quad (2:6a)$$

$$P_A = \rho_{0A} U_{sA} \Delta U_{pA} \quad (2:6b)$$

$$P_B = \rho_{0B} U_{sB} \Delta U_{pB} \quad (2:6c)$$

Partikelhastigheten för stav B blir $U_{pB} = \Delta U_{pB}$ bakom stötvågsfronten och noll framför stötvågsfronten eftersom staven stod still. För stav A är hastigheten framför stötvågsfronten lika med hastigheten före stöt v_0 medan hastigheten bakom stötvågsfronten minskar till $v_0 - \Delta U_{pA}$. Kontinuitetsvillkor ger att samma rörelse fås vid randen:

$$v_0 - \Delta U_{pA} = \Delta U_{pB} \quad (2:6d)$$

vilket kan skrivas om som

$$v_0 = \Delta U_{pA} + \Delta U_{pB} \quad (2:6e)$$

Materialens tillståndsekvation enligt ekvation (2:5f) beskrivs som:

$$U_{sA} = C_{0A} + S_{1A} \Delta U_{pA} \quad (2:6f)$$

Splitterverkan

$$U_{sB} = C_{0B} + S_{1B}\Delta U_{pB} = C_{0B} + S_{1B}U_{pB} \quad (2:6g)$$

där C_{0A} och C_{0B} är stötvågshastighet för trycket noll och S_A och S_B är materialkonstanter för stav A respektive stav B. Med materialens tillståndsekvation kan trycket vid gränsskiktet uttryckas som:

$$P_A = \rho_{0A}(C_{0A} + S_{1A}\Delta U_{pA})\Delta U_{pA} \quad (2:6h)$$

$$P_B = \rho_{0B}(C_{0B} + S_{1B}\Delta U_{pB})\Delta U_{pB} \quad (2:6i)$$

Partikelhastigheten kan beräknas genom att kombinera ekvation (2:6d) med ekvation (2:6h), nyttja att $U_{pB} = \Delta U_{pB}$. Härledning av följande uttryck finns i Bilaga A:5:

$$U_{pB} = \frac{-(\rho_{0B}C_{0B} + \rho_{0A}C_{0A} + 2\rho_{0A}S_{1A}v_0) \pm \sqrt{\Delta}}{2(\rho_{0B}S_{1B} - \rho_{0A}S_{1A})} \quad (2:6j)$$

där

$$\Delta = (\rho_{0B}C_{0B} + \rho_{0A}C_{0A} + 2\rho_{0A}S_{1A}v_0)^2 + 4\rho_{0A}(C_{0A}v_0 + S_{1A}v_0^2)(\rho_{0B}S_{1B} - \rho_{0A}S_{1A}) \quad (2:6k)$$

för lika material blir U_{pB} genom insättning av

$$\rho_0 = \rho_{0A} = \rho_{0B}, C_0 = C_{0A} = C_{0B}, \text{ och } S_I = S_{1A} = S_{1B}:$$

$$U_{pB} = \frac{\rho_0(C_0v_0 + S_1v_0^2)}{(\rho_0C_0 + \rho_0C_0 + 2\rho_0S_1v_0)} = \frac{\rho_0v_0(C_0 + S_1v_0)}{2\rho_0(C_0 + S_1v_0)} = \frac{1}{2}v_0 \quad (2:6l)$$

vilket innebär att partikelhastigheten blir hälften av hastigheten före stöt när två lika material stöter emot varandra där den ena står still, jämför med elastisk stöt. Resultat här blir samma som beräkning enligt stelkroppsdynamik.

Med kännedom om partikelhastigheten för stav B kan partikelhastigheten för stav A beräknas med ekvation (2:6d):

$$\Delta U_{pA} = v_0 - U_{pB} \quad (2:6m)$$

Med kännedom om stötvågshastighet och partikelhastighet för båda stavarna kan samtliga stötvågsparametrar beräknas utifrån ekvationerna (2:5a-c). I Bilaga A:6 visas ett numeriskt exempel för en plastisk stöt.

3 Splitter

3:1 Introduktion

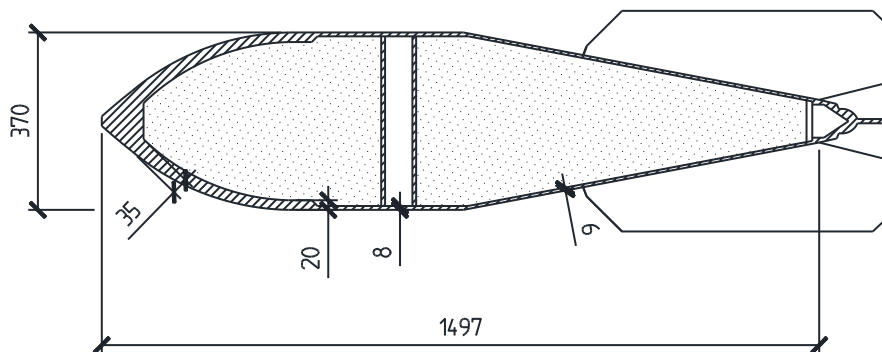
3:1:1 *Definition av splitter*

Splitter definieras enligt Svenska Akademiens ordbok (SAOB), se www.saob.se, som: genom slag, stöt, krossning, explosion, sprängning och dylikt åstadkomna små (någon gång även), oregelbundna och skarpkantade stycken, bitar, flisor, skärvor, stickor och dylikt.

Ordboken har fler sammansatta ord med splitter, exempelvis splitterbrott, vilket betyder benbrott med splittrade ändar. Ett annat sammansatt ord är splitterbomb, vars betydelse är: sprängbomb som vid krevad kastar omkring splitter. Med krevad menas: sprängas, explodera och dylikt. I denna rapport menas med splitter de fragment som åstadkoms av en splitterbomb.

Enligt skyddsrumslagreglerna Skyddsrum SR09, MSB (2009) skall skyddsrummet tåla verkan av en tryckvåg motsvarande den som åstadkoms av en 250 kg minbomb med 50 viktprocent trotyl (TNT) som briserar 5,0 meter från skyddets utsida vid fri tryckavlastning. Hädanefter refereras denna bombverkan som "arkivbomb".

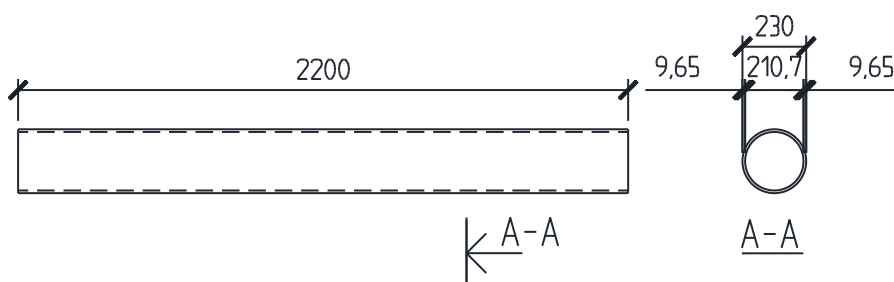
En "systerbomb" till arkivbomben är en minbomb enligt figur 3:1a. Bomben har kaliber 0,37 m och bombens totalvikt är 270 kg. Laddningsvikten är 140 kg hexotol (HBX-3) och höljets vikt är 130 kg, varav ca 10 kg utgörs av nosen och den bakre delen. Detta ger ca 120 kg splittergivande massa. Denna bomb har nyttjats vid framtagning av arkivbomben, se appendix B:1.



Figur 3:1a. Minbomb m/50. Systerbomb till arkivbomben. Avritad från Andersson *et al.* (1989).

3:12 Arkivbomben

Arkivbomben definierad i denna rapport är en fiktiv bomb, vilken redovisas i figur 3:1b samt tabell 3:1a. Denna arkivbomb gäller vid framtagning av splitterdata. Dess lasteffekt, det vill säga den stötvåg och splitter som orsakas från arkivbomben motsvarar en 250 kg minbomb med 50 viktprocent trotyl (TNT) som briserar 5,0 meter från skyddets utsida vid fri tryckavlastning. Härledning för framtagning av arkivbomben redovisas i Bilaga B:1. Data för arkivbomb redovisas i tabell 3:1a.



Figur 3:1b. Arkivbomb. Fiktiv cylindrisk bomb vars lasteffekt motsvarar en 250 kg minbomb. Nosen och den bakre delen består av icke splittergivande massor, varför dessa partier inte beaktas.

Tabell 3:1a. Data för arkivbomb.

Form	Cylindrisk
Massa bomb, M_b	250 kg
Massa sprängmedel, TNT ¹⁾ , W	125 kg
Splittergivande massa	114,6 kg
Längd, L	2,2 m
Ytterdiameter, d_b	230 mm
Innerdiameter, d_i	210,7 mm
Höljets tjocklek, t_h	9,65 mm
Splitterfördelningsparameter, M_A ²⁾	$2,28 \text{ g}^{1/2} / \text{mm}^{7/6}$
Motts konstant ³⁾	$3,67 \text{ kg}^{1/2} / \text{m}^{7/6}$

¹⁾ densitet för TNT = 1630 kg/m^3 enligt Johansson och Laine (2007)

²⁾ beräknas enligt ekvation (3:31c)

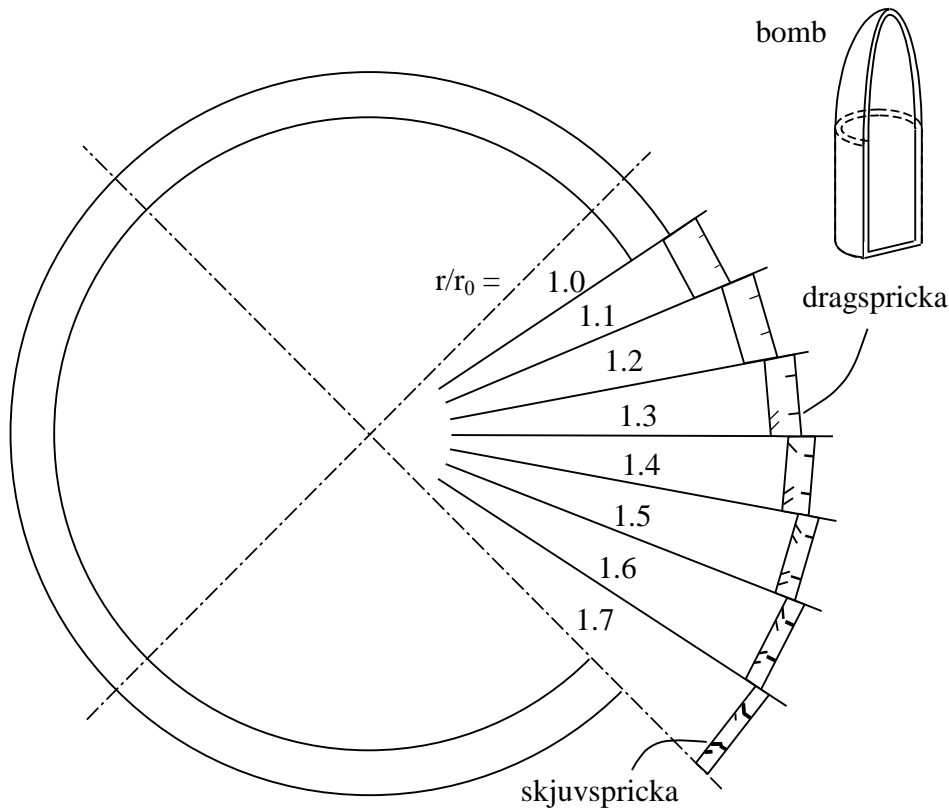
³⁾ enligt tabell 3:31a

Viktiga referenser i detta kapitel är ConWep (1992), Engberg och Karevik (1987), Fortifikationsförvaltningen (1973b), Krauthammer (2000) och Janzon (1978).

3:2 Fragmentering

Splitter uppkommer då en bombs hölje fragmenteras och består av delar från höljet av varierande form och storlek. Fragmentering är ett samlingsnamn på alla processer som sönderbryter eller delar en bombs hölje. Dock finns förfragmenterade bomber där fragmenteringen är helt eller delvis fullbordad innan detonationen sker. Fragmenteringen är beroende på ett flertal faktorer, såsom höljets form, tjocklek och materialegenskaper samt sprängämnets mängd och materialegenskaper.

För att klarlägga fragmenteringen studerar vi en ideal cylinder. Figur 3:2a visar en principskiss över fragmenteringsförloppet. När sprängämnet exploderar uppstår ett spränggastryck som får höljet att expandera. Under expansionen töjs höljet i tangentiell riktning, tjockleken minskar och höljet spricker. När sprickan utbreder sig inåt möter den ett tryck som permanent eller delvis förhindrar dess utbredning. Dock fortsätter expansionen av höljet, vilket deformeras utefter ett antal glidlinjer i riktningarna för maximala skjuvspänningar. När de inifrån kommande skjuvsprickorna möter de radially sprickorna är fragmenteringen fullbordad; höljet delas upp i mindre bitar och slungas iväg ifrån bomben i form av splitter. Töjningsenergin som upptas av höljet när det fragmenteras är endast någon eller några procent av utkastets rörelseenergi, se Janzon (1978). Dock går det åt energi att omvandla fragmenten från höljet till rörelseenergi, det vill säga att det går åt energi att kasta iväg splittren. Detta ger en minskad effekt av stötvågen och detta behandlas vidare i avsnitt 6:52.



Figur 3:2a. Principskiss över fragmenteringsförloppet. Baserad på Janzon (1978).

3:3 Splitterfördelning

3:31 Beräkning av splitterfördelning

Vid detonationen fragmenteras höljet och splitterfördelningen varierar beroende på höljets massa, tjocklek och diameter, samt av mängd och typ av det explosiva ämnet.

Antalet splitter som har massan större än ett splitter med massan m_s fås enligt följande:

$$n_{m_s} = \frac{M_h}{2M_A} e^{-\sqrt{\frac{m_s}{M_A}}} \quad (3:31a)$$

där M_h är höljets massa och M_A är en splitterfördelningsparameter. Totala antalet splitter fås genom att sätta $m_s = 0$, vilket ger:

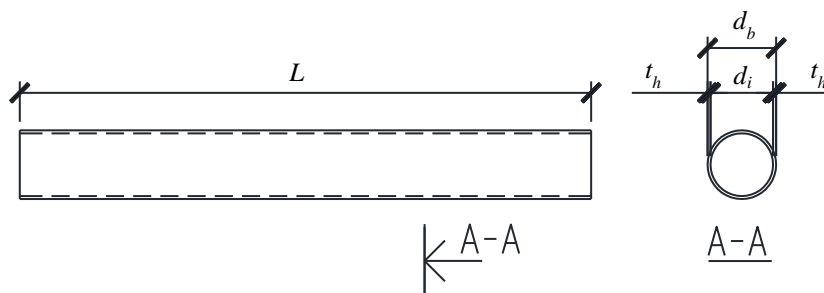
$$n_s = \frac{M_h}{2M_A} \quad (3:31b)$$

Splitterverkan

För att beräkna splitterfördelningsparametern omvandlas bomben till en ekvivalent cylinder enligt figur 3:31a och splitterfördelningsparametern fås som:

$$M_A = B^2 \cdot t_h^{5/3} \cdot d_i^{2/3} \left(1 + \frac{t_h}{d_i}\right)^2 \quad (3:31c)$$

där B är Motts konstant (fragmenteringskonstant) som beror på explosivämnet, t_h är höljets ekvivalenta tjocklek och d_i är höljets ekvivalenta innerdiameter.



Figur 3:31a. Ekvivalent cylinder.

För att nyttja ekvationerna (3:31a), (3:31b) och (3:31c) i godtycklig enhet behöver Motts konstant omräknas till nyttjad enhet. Tabell 3:31a visar värden på Motts konstant i olika enheter, för härledning av dessa värden se Bilaga B:4.

Tabell 3:31a. Mott konstant B i olika enheter för olika explosivämnen.

Explosiv- ämne ¹⁾	$B^{1)}$ [oz ^{1/2} /in ^{7/6}]	$B^{2)}$ [lb ^{1/2} /in ^{7/6}]	$B^{2)}$ [kg ^{1/2} /m ^{7/6}]	$B^{2)}$ [g ^{1/2} /mm ^{7/6}]
Baratol	0,51	0,128	6,23	0,0623
Comp B	0,22	0,055	2,69	0,0269
Cyclotol (75/25)	0,20	0,050	2,44	0,0244
H-6	0,28	0,070	3,42	0,0342
HBX-1	0,26	0,065	3,18	0,0318
HBX-3	0,32	0,080	3,91	0,0391
Pentolite (50/50)	0,25	0,063	3,06	0,0306
TNT	0,30	0,075	3,67	0,0367

¹⁾ Urval från ConWep med tillhörande Motts konstant

²⁾ Omräknat till andra enheter enligt Bilaga B:4

Massan för medelsplitter fås genom att dela höljets massa med det totala antalet splitter:

$$m_{smedel} = \frac{M_h}{n_s} = 2M_A \quad (3:31d)$$

Enligt ConWep kan det dimensionerande splittret beräknas som:

$$m_{sd} = M_A \cdot \ln^2(1 - CL) \quad (3:31e)$$

där CL är förkortning av "Confidence Level", $CL \geq 0,95$ är rekommenderad. Detta värde är definierat som sannolikhet att det dimensionerande splittret är det största splittret. Därmed kan antalet splitter som är större än det dimensionerande splittret beräknas enligt följande:

$$n_{msd} = n_s(1 - CL) \quad (3:31f)$$

3:32 Splitterfördelningsparameter

3:321 Bk 25

För att kunna bestämma splitterfördelningen omvandlas bomben till en ekvivalent cylinder enligt avsnitt 3:31 med ytterdiameter d_b och höljestjocklek t_h .

I Bk 25, Fortifikationsförvaltningen (1973), redovisas uttryck för ekvivalent ytterdiameter och bombens ekvivalenta höljestjocklek enligt följande:

$$d_b = 0,055\sqrt[3]{M_b} \quad (3:321a)$$

$$t_h = \frac{d_b}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 0,87 \frac{M_h}{W}}} \right) \quad (3:321b)$$

där M_b = bombens totala massa, M_h = höljets massa, W = massa sprängmedel.

Enligt Bk 25 ger Motts konstant $B = 1,5$ god anpassning för splitterdata för minbomber när ekvivalent diameter och tjocklek bestäms enligt ekvationerna (3:321a) och (3:321b). Vidare bestäms enligt Bk 25 approximativt höljets massa M_h och laddningsvikt W för minbomber som:

$$M_h = 0,4M_b \quad (3:321c)$$

$$W = 0,5M_b \quad (3:321d)$$

Splitterverkan

det vill säga att 10 % av bombens vikt beaktas ej för att beräkna splitterfördelningen. Med ekvationerna (3:321a-d) fås enligt Bk 25 god anpassning till splitterdata från minbomber.

Vidare har Motts konstant ingen koppling till något explosivämne ifall den jämförs med värden i ConWep, exempelvis är Motts konstant $B = 3,67 \text{ kg}^{1/2} \text{ m}^{-7/6}$ för TNT eller $B = 3,91 \text{ kg}^{1/2} \text{ m}^{-7/6}$ för HBX-3 omräknat till SI-enhet, se tabell 3:31a. Därmed kan beräkningen enligt Bk 25 av splitterfördelningsparametern endast vara giltiga för en bomb med likvärdiga geometriska förhållanden och uttrycken i ekvation (3:321a) och ekvation (3:321b) kan inte generaliseras till en godtycklig bomb.

Enligt Bk 25 beräknas splitterfördelningsparametern K enligt följande:

$$K = B \cdot t_h^{5/6} \cdot d_i^{1/3} \left(1 + \frac{t_h}{d_i}\right) \quad (3:321e)$$

Antalet splitter som har massan större än ett splitter med massan m_s beräknas enligt följande:

$$n_{ms} = \frac{M_h}{2K^2} e^{-\frac{\sqrt{m_s}}{M_A}} \quad (3:321f)$$

Genom att kombinera högerdel i ekvation (3:31a) med högerdel i ekvation (3:321f) fås ett samband mellan M_A och K :

$$\frac{M_h}{2M_A} e^{-\frac{\sqrt{m_s}}{M_A}} = \frac{M_h}{2K^2} e^{-\frac{\sqrt{m_s}}{M_A}} \quad (3:321g)$$

varvid fås:

$$M_A = K^2 \quad (3:321h)$$

3:322 ConWep

I ConWep finns en tabell för splitterfördelningsparametern för olika vapentyper, se tabell 3:322a. Dock redovisas inte hur denna tabell är framtagen.

Splitterverkan

Tabell 3:322a. Splitterfördelningsparametern M_A i olika enheter för olika vapen.

Vapentyp ¹⁾	M_A ¹⁾ [oz]	M_A ²⁾ [lb]	M_A ²⁾ [kg]	M_A ²⁾ [g]
GP 250lb Mk81	0,050	$3,12 \cdot 10^{-3}$	$1,42 \cdot 10^{-3}$	1,42
GP 500lb Mk82	0,072	$4,50 \cdot 10^{-3}$	$2,04 \cdot 10^{-3}$	2,04
GP 1000lb Mk83	0,204	$1,27 \cdot 10^{-3}$	$5,78 \cdot 10^{-3}$	5,78
Spränggranat 155mm	0,253	$1,58 \cdot 10^{-3}$	$7,17 \cdot 10^{-3}$	7,17

¹⁾ Urval från ConWep med tillhörande splitterfördelningsparameter M_A

²⁾ Omräknat till andra enheter enligt Bilaga B:4

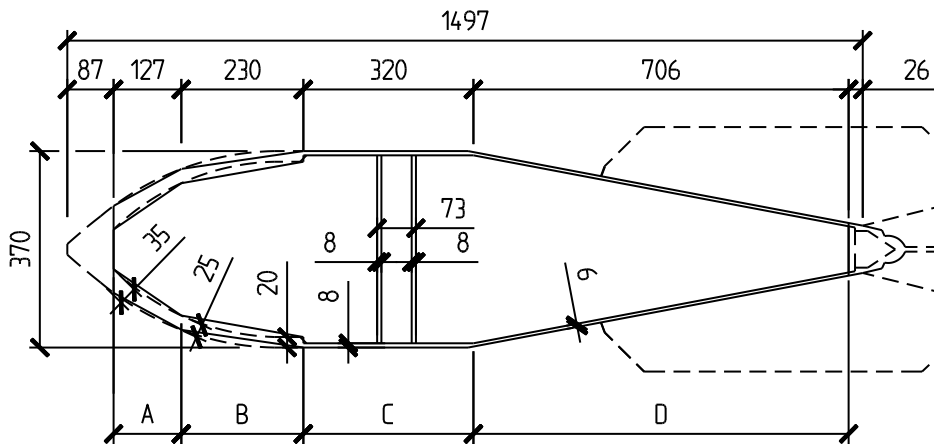
3:323 **Metod med flera ekvivalenta cylindrar**

Med kännedom om bombens massa, densitet och geometri samt explosiv-
ämnets massa och densitet kan splitterfördelningsparametern tas fram för en
godtyckligt utformad bomb genom att dela in denna i flera ekvivalenta
cylindrar enligt följande exempel.

I detta exempel tas splitterfördelningsparametern fram för arkivbombens
systembomb som beskrivs i figur 3:1a och 3:323a. Bomben har en totalvikt
på 270 kg varav 140 kg är sprängämne (hexotonal) och 120 kg splitter-
givande höljesmassa. Fenor och centrälrör (initieringsdel) väger tillsammans
ca 10 kg. Splitterdata till bomben är hämtat från Andersson *et al.* (1989).

Första steget är att förenkla bombens geometri. För att beräkna den inne-
slutna volymen (och därmed sprängämnets massa) samt höljets volym (och
därmed höljets massa) delas bomben in i avskurna koner för nosen och den
bakre delen. Ju fler indelningar som görs, desto noggrannare lösning erhålls.

Splitterverkan



Figur 3:323a. Geometri för bomben indelad i 4 områden. Heldragen linje visar förenklad geometri av bomben och streckad linje visar bombens geometri.

Höljets och sprängämnets massa beräknas som:

$$M_h = V_h \rho_h \quad (3:323a)$$

$$\rho_h = 7800 \text{ kg/m}^3 \text{ (antaget värde på höljets densitet)}$$

$$W = V_w \rho_{hex} \quad (3:323b)$$

$$\rho_{hex} = 1856 \text{ kg/m}^3 \text{ (densitet för HBX-3)}$$

Densitet för HBX-3 varierar mellan $1\,844 \text{ kg/m}^3$ och $1\,868 \text{ kg/m}^3$ enligt Edvinsson *et al.* (2005).

Volymen för en avskuren kon beräknas som:

$$V = \frac{\pi h}{3} (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2) \quad (3:323c)$$

där r_1 och r_2 är radien i respektive ände.

Bomben omvandlas sedan till flera ekvivalenta cylindrar, se figur 3:323b. För respektive del bestäms splitterfördelningsparametern M_A enligt ekvation (3:31c). Dimensioner på de ekvivalenta cylindrarna bestäms på så sätt att sprängämnets massa och höljets massa bibehålls.

För att bestämma innerdiametern för den ekvivalenta cylindern sätts volymen för den avskurna konen lika med volymen för en cylinder för respektive del. Därefter kan ekvivalent innerdiameter d_i lösas ut som:

Splitterverkan

$$V_w = \frac{\pi d_i^2}{4} L_i \Rightarrow d_i = \sqrt{\frac{4V_w}{\pi L_i}} \quad (3:323d)$$

där V_w sprängämnets volym och L_i är längden på delområdet.

På motsvarande sätt som för sprängämnets volym sätts höljets volym lika med den ekvivalenta cylindershöljesvolym, och ekvivalent ytterdiameter, d_b kan bestämmas som:

$$V_h = \pi L_i \left(\frac{d_b^2}{4} - \frac{d_i^2}{4} \right) \Rightarrow d_b = \sqrt{\frac{4V_h + \pi L_i d_i^2}{\pi L_i}} \quad (3:323e)$$

Ekvivalent höljestjocklek beräknas som:

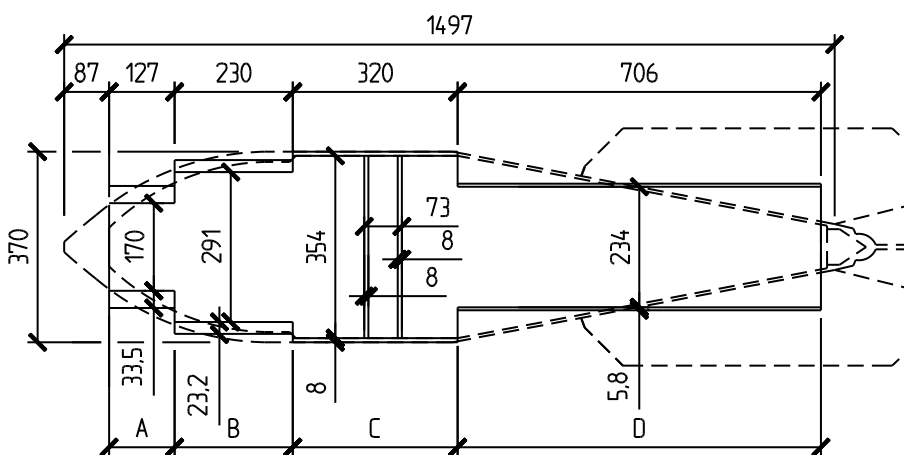
$$t_h = \frac{d_b - d_i}{2} \quad (3:323f)$$

alternativt som

$$t_h = \frac{d_b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d_b}{2} \right)^2 - \frac{m}{\rho L_b \pi}} \quad (3:323g)$$

med härledning enligt Bilaga B:51.

I figur 3:323b visas bomben indelad i fyra ekvivalenta cylindrar, område A-D.



Figur 3:323b. Ekvivalent bomb, indelad i fyra ekvivalenta cylinder delar.

Splitterfördelningsparametern M_A kan nu bestämmas för varje del enligt ekvation (3:31c). För hexotol (HBX-3) är Motts konstant $B = 3,91 \text{ kg}^{1/2} \text{ m}^{-7/6}$ och antalet splitter beräknas enligt ekvation (3:3a).

Splitterverkan

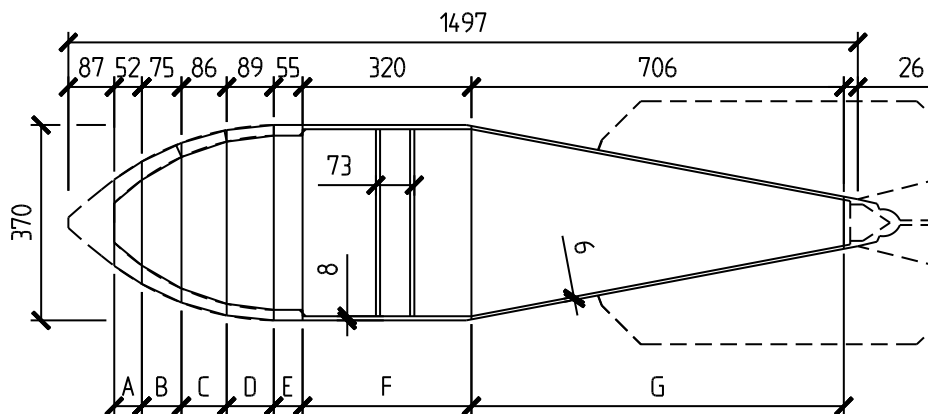
I tabell 3:323b sammanställs geometri, höljets vikt och mängden sprängämnen för bomben, samt splitterfördelningsparametern för respektive område av bomben med förenklad geometri enligt figur 3:323b.

Tabell 3:323b. Sammanställning av ekvivalent cylinder för arkivbomb indelad i fyra områden enligt figur 3:323b.

Område	L_i [m]	d_i [m]	d_b [m]	t_h [mm]	M_h [kg]	W [kg]	M_A [g]	antal [st]
A	0,127	0,170	0,237	33,5	21,2	5,3	23,3	453
B	0,230	0,290	0,337	23,2	41,0	28,3	14,8	1 390
C ¹⁾	0,247 ¹⁾	0,354	0,370	8,0	35,0	45,1	2,6	6 834
D	0,706	0,234	0,245	5,8	23,9	56,1	1,1	10 558
Summa					121,1	134,9		19 235

¹⁾ $0,320 - 0,073 = 0,247$ m enligt figur 3:323b, parametrar (d_i , d_b , t_h , W och M_A) är beräknade utifrån denna längd. Dock adderas splittermassan till bomben från mittendelen som ej är fylld med sprängämne.

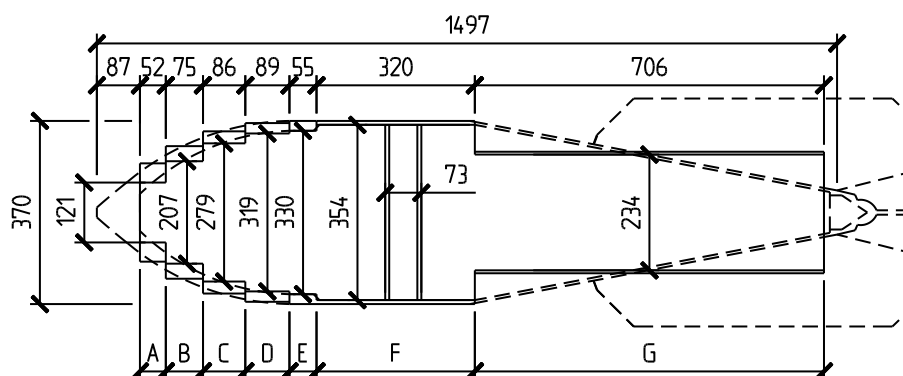
Enligt tabell 3:323b fås höljets massa till 121,1 kg och mängden sprängämne i den ekvivalenta bomben blir 134,9 kg. Detta kan jämföras med den riktiga bomben, där höljets massa är 120 kg och mängden sprängmedel är 140 kg. För att öka noggrannheten kan bomben delas in i fler ekvivalenta cylindrar, vilket görs nedan. Figur 3:323c visar bomben indelad i sju områden.



Figur 3:323c. Geometri för bomben indelad i sju områden. Heldragen linje visar förenklad geometri av bomben och streckad linje visar bombens geometri.

Bomben indelad i sju ekvivalenta cylindrar visas i figur 3:323d.

Splitterverkan



Figur 3:323d. Ekvivalent bomb, indelad i sju ekvivalenta cylinder delar.

Sammanställning för respektive ekvivalent cylinder visas i tabell 3:323c. Den totala massan blir 120,6 kg för höljet och mängden sprängämne blir 138,7 kg. Jämför nu vikten för höljet vilket var 120 kg och mängden sprängmedel som var 140 kg för den riktiga bomben. Skillnaden är nu så liten mellan antagen geometri och den riktiga bombens geometri att en ytterligare förfining av geometrin inte ger någon betydande skillnad i splitterfördelningen.

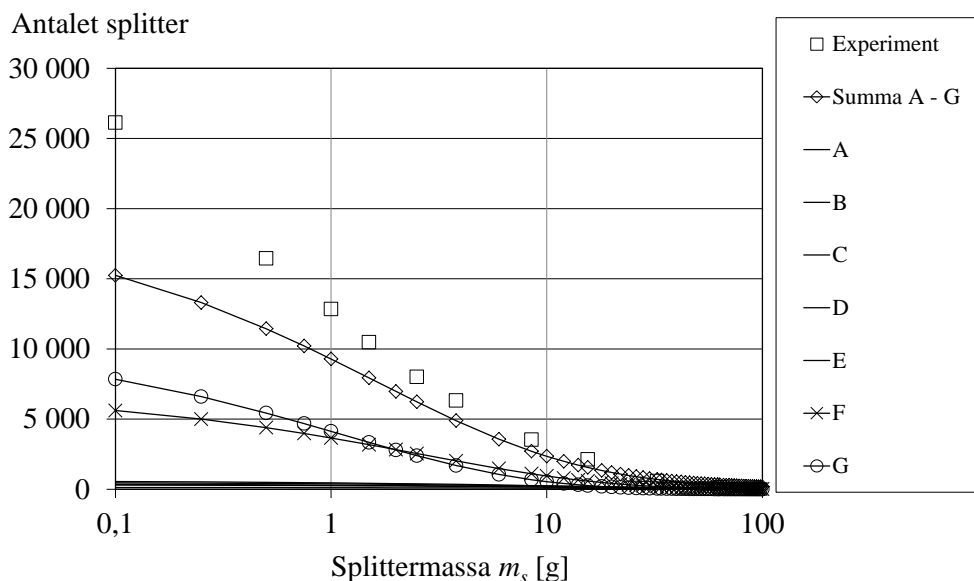
Tabell 3:323c. Sammanställning av ekvivalent cylinder för arkivbomb indelad i sju områden enligt figur 3:323d.

Område	L_i [m]	d_i [m]	d_b [m]	t_b [mm]	M_h [kg]	W [kg]	M_A [g]	antal [st]
A	0,052	0,121	0,199	38,7	7,9	1,1	28,9	137
B	0,075	0,207	0,268	30,4	13,3	4,7	20,9	318
C	0,086	0,279	0,327	24,3	15,5	9,7	15,7	494
D	0,089	0,319	0,361	21,0	15,5	13,2	12,9	601
E	0,055	0,330	0,370	20,0	9,4	8,7	12,1	390
F ¹⁾	0,247	0,354	0,370	8,0	35,0 ¹⁾	45,1	2,6	6 834
G	0,706	0,234	0,245	5,8	23,9	56,1	1,1	10 558
Summa					120,6	138,7		19 332

¹⁾ $0,320 - 0,073 = 0,247$ m enligt figur 3:323d, parametrar (d_i , d_b , t_b , W och M_A) är beräknade utifrån denna längd. Dock adderas massan splitter till bomben från mittendelen som ej är fylld med sprängämne.

Slutligen bestäms splitterfördelningen genom att beräkna antalet splitter för respektive ekvivalent cylinder och därefter summera antalet splitter, vilket visas i figur 3:323e. I denna figur visas även experimentella resultat från Andersson *et al.* (1989). Antalet splitter från del A till E är mycket liten i förhållande till del F och G. Det totala antalet splitter med denna metod blir något lägre än i försöken.

Splitterverkan



Figur 3:323e. Antalet splitter med en massa större än m_s . Jämförelse med experiment och metod med ekvivalenta cylindrar. Experiment från Andersson *et al.* (1989).

3:33 Splitterfördelning för olika bomber

3:331 Minbomb m/50

En jämförelse med Bk 25, ConWep, metod med ekvivalenta cylindrar samt arkivbomben med experiment redovisade i Andersson *et al.* (1989) visas i figur 3:331a. Bomben har kaliber 0,37 m och bombens totalvikt är 270 kg. Laddningsvikten är 140 kg hexotol (HBX-3) och höljets vikt är 130 kg, varav ca 10 kg utgörs av nosen och den bakre delen. Detta ger ca 120 kg splittergivande massa.

Enligt Bk 25 fås med ekvationerna (3:321a-d):

$$M_h = 0,4 \cdot M_b = 0,4 \cdot 270 = 108 \text{ kg} \quad (3:331a)$$

$$W = 0,5 \cdot M_b = 0,5 \cdot 270 = 135 \text{ kg} \quad (3:331b)$$

$$d_b = 0,055^3 \sqrt{M_{tot}} = 0,055^3 \sqrt{270} = 0,355 \text{ m} \quad (3:331c)$$

$$t_h = \frac{d_b}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 0,87 \frac{M_h}{W}}} \right) = \frac{0,355}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 0,87 \frac{108}{135}}} \right) = 0,041 \text{ m} \quad (3:331d)$$

Splitterverkan

Splitterfördelningsparametern enligt ekvation (3:321e) beräknas till:

$$\begin{aligned} K &= B \cdot t_h^{5/6} \cdot d_i^{1/3} \left(1 + \frac{t_h}{d_i}\right) = & (3:331e) \\ &= 1,5 \cdot 0,041^{5/6} \cdot (0,355 - 2 \cdot 0,041)^{1/3} \left(1 + \frac{0,041}{2 \cdot 0,355}\right) = 0,0786 \end{aligned}$$

Enligt ekvation (3:321g) fås sambandet mellan K och M_A enligt följande:

$$\begin{aligned} M_A &= K^2 = & (3:331f) \\ &= 0,0786^2 = 0,00619 \text{ kg}^{1/2} / \text{m}^{7/6} = 6,19 \text{ g}^{1/2} / \text{mm}^{7/6} \end{aligned}$$

Höljets tjocklek blir orimligt stor med ekvationerna enligt Bk 25, vilket innebär att splitterfördelningsparameter blir mycket stor och därmed blir antalet splitter också betydligt lägre än jämfört exempelvis ConWep, se figur 3:331a. Vidare antas en fragmenteringskonstant $B = 1,5 \text{ kg}^{1/2} / \text{m}^{7/6}$ enligt Bk 25 vilket inte stämmer överens med värden redovisade i ConWep, se tabell 3:31a.

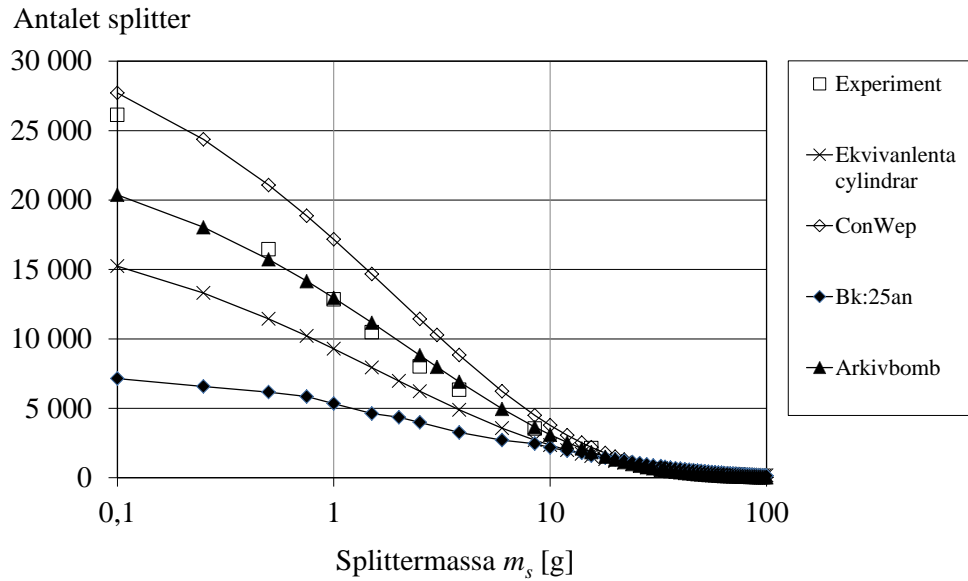
ConWep redovisar inte några data för en 250 kg minbomb. Nedanstående beräkning är baserad på splitterfördelningsparametern för Mk82, vilket är en likvärdig bomb till 250 kg minbomben. Följande värden har nyttjats vid beräkning av splitterfördelningen:

$$M_A = 2,04 \text{ g}^{1/2} / \text{mm}^{7/6} \quad (3:331g)$$

$$M_h = 120 \text{ kg} \quad (3:331h)$$

Indata för metod med ekvivalenta cylindrar visas i avsnitt 3:323, där resultatet är sammanställt i tabell 3:323c. Indata för arkivbomb redovisas i avsnitt 3:1.

Splitterverkan







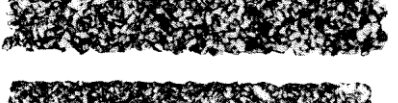
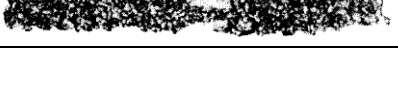
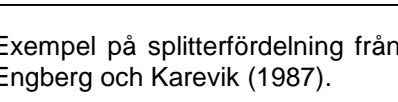


Figur 3:331a. Antalet splitter med en massa större än m_s . Jämförelse mellan experiment, metod med ekvivalenta cylindrar, ConWep (MK82) och Bk 25. I figur redovisas även antalet splitter beräknat för arkivbommen. Experiment från Andersson *et al.* (1989).

3:333 Spränggranat

Ett exempel på en splitterfördelning från en 155 mm spränggranat fördelad i viktklasser visas i figur 3:333a.

Splitterverkan

Viktklass g		Antal st	Massa g
> 63,5		88	8 832
63,5 - 32,5		186	8 078
32,5 - 15,5		334	7 524
15,5 - 8,5		323	3 575
8,5 - 3,8		520	3 020
3,8 - 2,5		328	1 022
2,5 - 1,5		406	778
1,5 - 0,5		882	784
< 0,5		—	641
			34 758

Figur 3:333a. Exempel på splitterfördelning från en 155 mm spränggranat, från Engberg och Karevik (1987).

Enligt Engberg och Karevik (1987) var höljets vikt för en studerad 155 mm spränggranat 36,9 kg och den efter utfört försök insamlade vikten var ca 34,8 kg, det vill säga att allt splitter inte återfanns efter explosionen.

För en 155 mm spränggranat fås med:

höljets massa $M_h = 36,9 \text{ kg} = 36\,900 \text{ g}$

massa sprängmedel $M_Q = 6,985 \text{ kg}$ Comp B (enligt ConWep)

explosivkonstant för Comp B = $2,69 \text{ kg}^{1/2} / \text{mm}^{7/6}$ (enligt tabell 3:3a)

Enligt Bk 25 fås med ekvationerna (3:321a-d):

$$M_h = 0,4 \cdot M_b = 0,4 \cdot 43,9 = 17,6 \text{ kg} \quad (3:333a)$$

$$W = 0,5 \cdot M_b = 0,5 \cdot 43,9 = 21,9 \text{ kg} \quad (3:333b)$$

$$d_b = 0,055 \sqrt[3]{M_{tot}} = 0,055 \sqrt[3]{43,9} = 0,194 \text{ m} \quad (3:333c)$$

Splitterverkan

$$t_h = \frac{d_b}{2} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 0,87 \frac{M_h}{W}}} \right] = \frac{0,194}{2} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 0,87 \frac{17,6}{21,9}}} \right] = \quad (3:333d)$$
$$= 0,023 \text{ m}$$

Splitterfördelningsparametern enligt ekvation (3:321e) beräknas till:

$$K = B \cdot t_h^{5/6} \cdot d_i^{1/3} \left(1 + \frac{t_h}{d_i} \right) = \quad (3:333e)$$
$$= 1,5 \cdot 0,023^{5/6} \cdot (0,194 - 2 \cdot 0,023)^{1/3} \left(1 + \frac{0,023}{2 \cdot 0,194} \right) = 0,0388$$

Enligt ekvation (3:321g) fås sambandet mellan K och M_A enligt följande:

$$M_A = K^2 = \quad (3:333f)$$
$$= 0,0388^2 = 0,00150 \text{ kg}^{1/2} / \text{m}^{7/6} = 1,5 \text{ g}^{1/2} / \text{mm}^{7/6}$$

Antalet splitter för en spränggranat enligt formel från Bk 25 fås som:

$$n_s = \frac{M_h}{2M_A} = \frac{17600}{2 \cdot 1,5} = 5834 \text{ st splitter}$$

Ekvationerna redovisade i Bk 25 visar uttryck för minbomber, varför dessa inte är direkt applicerbara för en spränggranat. Här görs dock ändå en beräkning för jämförelsens skull. Höljets massa bestäms som $0,4 M_{tot}$ och sprängämnets massa bestäms som $0,5 M_{tot}$. Detta ger orimliga värden eftersom exempelvis höljets vikt är ca $0,84 M_{tot}$ för spränggranaten, medan massan är endast ca $0,16 M_{tot}$. Dock redovisas här antalet splitter med uttryck enligt Bk 25 samt enligt ConWep i figur 3:333b. Indata för ConWep ges nedan.

Enligt ConWep är fragmenteringskonstant $M_A = 7,17 \text{ g}$ (enligt tabell 3:4a).

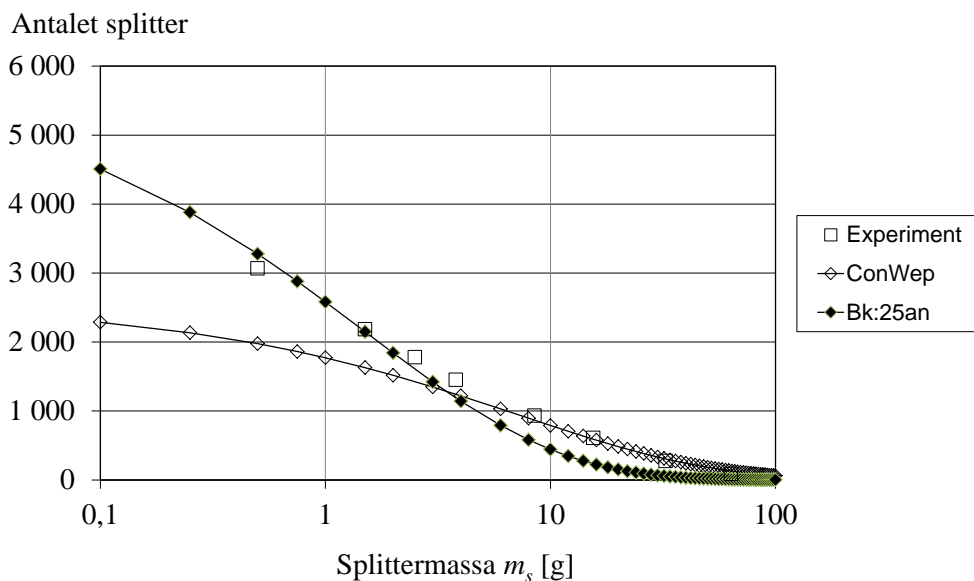
Antalet splitter för en spränggranat fås som:

$$n_s = \frac{M_h}{2M_A} = \frac{36900}{2 \cdot 7,17} = 2573 \text{ st splitter}$$

och antalet splitter med massan större än m_s fås som:

$$n_{ms} = n_s e^{-\sqrt{\frac{m_s}{M_A}}} = 2573 e^{-\sqrt{\frac{m_s}{7,17}}}$$

Splitterverkan



Figur 3:333b. Antalet splitter med en massa större än m_s . Jämförelse mellan experiment, ConWep och Bk 25 för en 155 mm spränggranat. Experiment från Engberg och Karevik (1987).

3:4 Splittertätthet och form

3:41 Splittertätthet

Splittertättheten ρ_s definieras som splittermassan från bomben genom anslagsytan och minskar därmed med ökat avstånd från detonationen eftersom anslagsytan ökar. För en detonation i luft kan en första mycket grov approximation göras genom att dela höljets massa från bomben med ytan för en sfär, vilket ger splittertättheten/m².

Ytan för en sfär S med radien r fås som:

$$S = 4\pi r^2 \quad (3:41a)$$

För arkivbomben med höljets massa på 125 kg och avståndet $r = 5$ m fås:

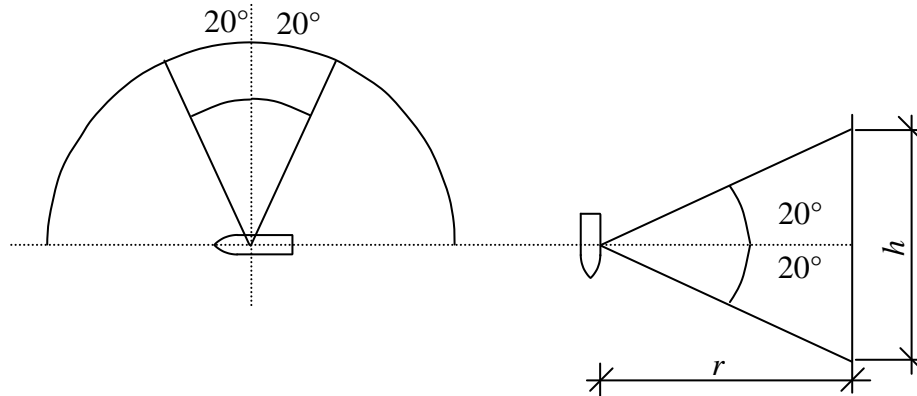
$$S = 4\pi r^2 = 4\pi 5^2 = 100\pi = 314 \text{ m}^2 \quad (3:41b)$$

$$\rho_s = \frac{M_h}{S} = \frac{125}{314} = 0,40 \text{ kg/m}^2 \quad (3:41c)$$

På liknande sätt kan en första grov approximation till antalet splitter per kvadratmeter, genom att dela antalet splitter med ytan för en sfär med radien på 5 meter. Från arkivbomben fås totalt ca 20 000 splitter, vilket ger ca 64 splitter/m² och antalet splitter med massan större än 50 gram uppgår till ca 400 st, vilket ger ca ett splitter/m².

Splitterverkan

Dock är inte bomber sfäriska och mantelns tjocklek varierar i bomben, vilket medför att utkastningen varierar i olika riktningar för en bomb. Dessutom har bombens relativa placering stor betydelse för hur splitterfördelningen blir. Experiment beskrivna i Forsén och Sten (1994) visar att 60 % av splittren träffade ett segment av 40 grader, dvs. ± 20 grader, mätt vinkelrät bomben, i ett plan då bomben placerades i horisontellt läge enligt figur 3:41a. Ifall bomben placerades i vertikalt läge blev spridningen jämn i radiell riktning i detta plan.



Figur 3:41a. Splitterfördelning av bomb placerad i horisontalt respektive vertikalt läge.

En mer realistisk splitterfördelning fås därmed ifall splittret fördelas som en cylinder kring bomben där höjden bestäms som funktion av radien och vinkeln,

Ytan för en cylinder med radien r och höjden h fås som:

$$S = 2\pi r h \quad (3:41d)$$

För arkivbomben med höljets massa på 125 kg och avståndet $r = 5$ m, samt höjden baserad på vinkeln ± 20 grader fås:

$$S = 2\pi r (2r \tan \alpha) = 2\pi \cdot 5 \cdot (2 \cdot 5 \tan 20) = 114 \text{ m}^2 \quad (3:41e)$$

Med antagandet att 60 % av splittren träffar inom ett cylindriskt segment fås splittertätheten:

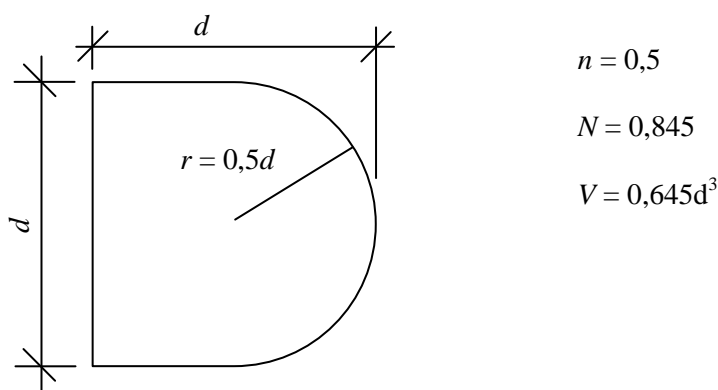
$$\rho_s = \frac{M_h}{S} = \frac{0,6 \cdot 125}{114} = 0,66 \text{ kg/m}^2 \quad (3:41f)$$

vilket ger en ökning på splittertäthet med faktor på 1,65 jämfört med sfärisk utbredning.

3:42 Splitterform

Splittrens form är mycket oregelbunden och varierar i storlek, se exempelvis figur 3:333a. För att förenkla splittren nyttjas ett standardsplitter. Ett standardsplitter definieras som ett splitter som representerar splittret från en bomb, vilket visas i figur 3:42a och har en antagen nosform formad som en halvsfär. U.S. Department of Energy (1980) motiverar nyttjande av ett standardsplitter med denna form med att enbart ett fåtal av splittren träffar med spetsen före och att enbart ett fåtal splitter är spetsigare än ett standardsplitter. Vidare är förhållande mellan längd och diameter för ett standardsplitter representativ för ett splitter.

N är nosformfaktorn, n är kaliberradien för en tangent ogival nosform och V är volymen av splittret, se Bilaga B:3 för beräkning av dessa.



Figur 3:42a. Geometri hos ett standardsplitter enligt U.S. Department of Energy (1980).

För en given bomb kan det dimensionerande splittrets massa beräknas enligt ekvation (3:42a). Med massan och densiteten för höljet känd kan standardsplittret tas fram genom att lösa ut diametern för denna enligt följande:

$$m_{sd} = \rho_{hölje} V = \rho_{hölje} 0,645d^3 \quad (3:42a)$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{m_{sd}}{\rho_{hölje} 0,645}} \quad (3:42b)$$

3:5 Splitterhastighet

För att bestämma splittrets hastighet kan empiriska samband nyttjas, se Fortifikationsförvaltningen (1973), U.S. Department of Energy (1980), Engberg och Karevik (1987) eller ConWep (1992). Dessa samband finns redovisade i Bilaga B:3. Splittrets utgångshastighet, v_0 beror på mängden sprängmedel W och höljets massa M_h . I figur 3:5a visas splitterhastigheter för arkivbomben med varierande splittermassa och avstånd från explosion.

Splitterverkan

Splittrets massa för en arkivbomb antas normalt variera mellan 1 till 50 gram, dock kan något enstaka splitter ha högre massa. I figuren visas splitterhastigheten för splittermassor upp till 400 gram. Initiellt är splitterhastigheten densamma oberoende av splittrets massa. När splitter färdas i luften minskar hastigheten dock på grund av luftmotståndet där denna hastighetsminskning beror på splittrets massa. Exempelvis för splitter med massan 50 gram minskar hastigheten från 2 075 m/s till 1 950 m/s på ett avstånd på 5 meter, medan för splittermassa 5 gram har hastigheten på samma avstånd redan minskat till cirka 1 820 m/s.

Splitterhastighet i figur 3:5a är beräknade med ekvationer enligt Engberg och Karevik (1987), dessa ekvationer redovisas nedan.

Utgånshastighet, v_0 hos splitter kan bestämmas enligt följande formel:

$$v_0 = 2400 \cdot (1 - e^{-2W/M_h}) \quad (3:5a)$$

där W är sprängämnesmassa i [kg] och M_h är höljets massa i [kg].

Splitterhastigheten i luften, v_r , avtar med sträckan r och den kan bestämmas enligt följande formel:

$$v_r = v_0 e^{-0,0456r/\sqrt[3]{m_s}} \quad (3:5b)$$

där v_0 beräknas enligt ekvation (3:5a) och m_s är splittermassa i [g].

Med en omskrivning av ekvation (3:5b) kan splitterhastigheten beräknas med följande formel där splittermassan anges i [kg] istället [g]:

$$v_r = v_0 e^{-0,00456r/\sqrt[3]{m_s}} \quad (3:5c)$$

För arkivbomben vid beräkning av splitterhastighet nyttjas indata enligt tabell 3:5a.

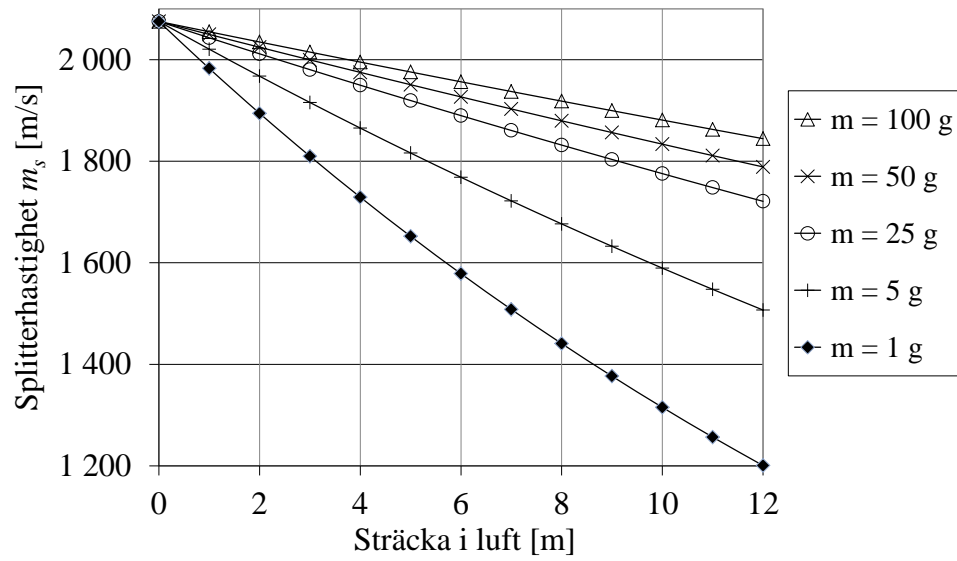
Tabell 3:5a. Indata för beräkning av splitterhastighet för arkivbomb.

Massa bomb, M_b	250 kg
Massa sprängmedel, TNT, W	125 kg
Höljets massa, M_h	125 kg

vilket ger utgångshastigheten för splitter för arkivbomben:

$$v_0 = 2400 \cdot (1 - e^{-2 \cdot 125 / 125}) = 2075 \text{ m/s} \quad (3:5d)$$

Splitterverkan



Figur 3:5a. Splitterhastigheter med varierande splittermassa från arkivbomben. Baserad på empirisk samband från Engberg och Karevik (1987).

4 Material

4:1 Introduktion

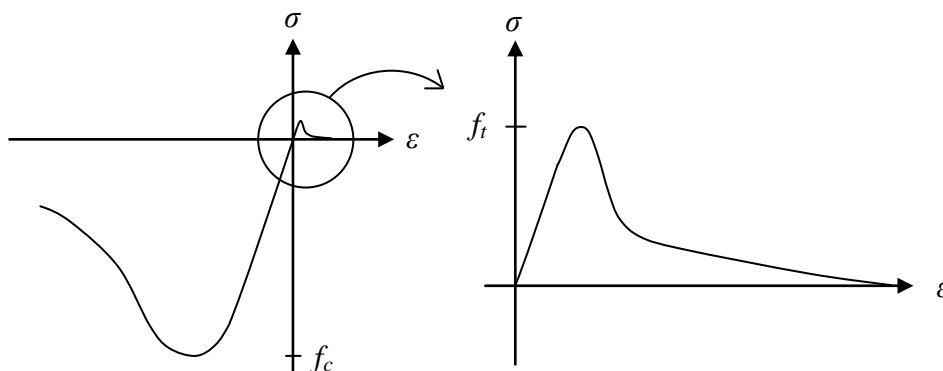
I detta kapitel behandlas materialegenskaper för betong och stål (armering). Vid dimensionering för statiska laster är ingående parametrar såsom tryck- och draghållfasthet eller elasticitetsmodul viktiga. Vid komplexa analyser för stötvågs- och splitterbelastning med FEM (finita elementmetod) eller hydrokoder räcker dock inte de statiska parametrarna till för att beskriva materialets uppförande på ett korrekt sätt. Dynamiska materialegenskaper såsom inverkan av belastningshastighet och materialets tillståndsekvation blir betydande. Vidare kan materialets tillståndsekvation nyttjas för enklare handberäkningar för att skapa sig en förståelse exempelvis hur ett bra skydd skall skapas.

4:2 Betong

4:21 Statisk respons

4:211 Enaxiellt spänningstillstånd

Betongens enaxiella spännings-töjningssambandet illustreras i figur 4:211a. Betong har en betydligt lägre draghållfasthet f_t än dess tryckhållfasthet f_c , lägre än en tiondel av tryckhållfastheten. Betongen är dessutom ett mycket sprött material, vilket innebär att när hållfastheten uppnås minskar dess hållfasthet avsevärt. Detta uppförande fås både i tryck och i drag, dock är betongen sprödare i drag än i tryck.



Figur 4:211a. Betongens spänning-töjningssamband för enaxiell belastning. Till vänster: för tryck och drag. Till höger: för drag uppförstorat.

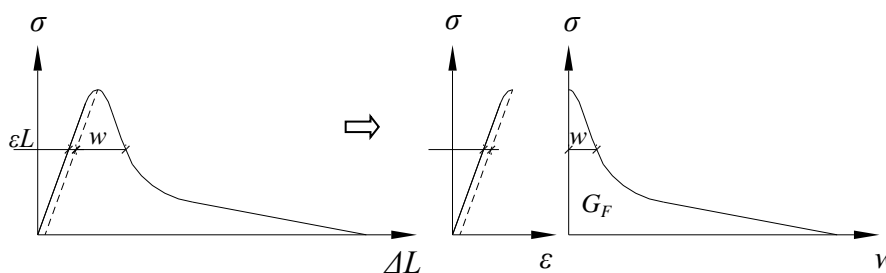
Splitterverkan

Tryckhållfastheten bestäms genom att utsätta provet för ett enaxiellt tryck (tryckbelastning i en riktning). Provkroppen är antingen en cylinder eller en kub. Mått för dessa kan variera. Vanliga mått är, för ett cylinderprov en höjd av 300 mm och diametern 150 mm, och för en kub med sidan 150 mm. Tryckhållfastheten varierar beroende på dessa två provningsmetodiker med en högre hållfasthet för kuber. Orsaken till detta är att provkroppen tvärvridas under belastning. Denna expansion i tvärriktningen förhindras av friktionen mellan provkropp och belastningsplatta. Friktionskraften ger upphov till ett sidotryck (omslutningstryck) som ger en ökad hållfasthet hos provkroppen. Denna friktionskraft blir mer dominerande för en kub eftersom kuben har större anläggningsarea i förhållande till sin höjd än cylindern och således fås en högre hållfasthet för kuben.

Betongens draghållfasthet kan bestämmas på flera sätt. Den kan bestämmas med ett rent dragprov, genom ett spräckprov eller med ett böjprov. Det finns även andra sätt att bestämma draghållfastheten, dock behandlas de inte vidare här. Vanligast är dock att draghållfastheten uppskattas med ett tryckprov, där draghållfastheten bestäms med ett empiriskt uttryck som ett förhållande till tryckhållfastheten.

Rent dragprov är betydligt mer komplicerat att utföra än ett tryckprov, ett spräckprov eller ett böjprov. Vidare, skiljer sig betongens draghållfasthet när den skall bestämmas med ett dragprov jämfört med ett spräckprov. Detta beror på att vid ett rent dragprov styrs inte sprickan till ett snitt utan sprickan kommer där draghållfastheten är lägst i provet.

Betong i drag kan beskrivas med spännings-deformationssamband enligt figur 4:211b. Betongen beskrivs med ett spännings-töjningssamband upp tills draghållfastheten nås. I betongen bildas mikrosprickor och när draghållfastheten är nådd beskrivs betongen med ett spännings-spricköppningssamband. Arealen under spännings-spricköppningssambandet benämns brottenergi G_F .



Figur 4:211b. Spännings-deformationssamband för betong.

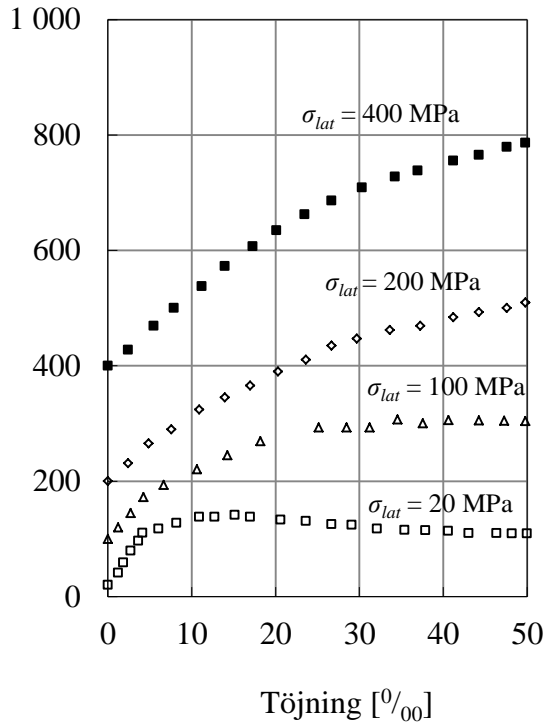
4:212 Fleraxiellt spänningstillstånd

Med fleraxiellt spänningstillstånd menas att betongen har spänningar i olika riktningar. Utsätts betong för fleraxiellt tryck menas att betongen utsätts för tryck från mer än ett håll, benämnt omslutningstryck. Med ökande omslut-

ningstryck ökar betongens förmåga att motstå tryckbelastning. Denna ökning orsakas av att betongen förhindras att tvärutvidgas.

I statistiska försök, redovisade i figur 4:212a för en betong med en enaxiell tryckhållfasthet på 46 MPa, visades att provet kunde bära en last på omkring 800 MPa när det samtidigt utsattes för ett omslutande tryck på 400 MPa.

Tryckspänning [MPa]

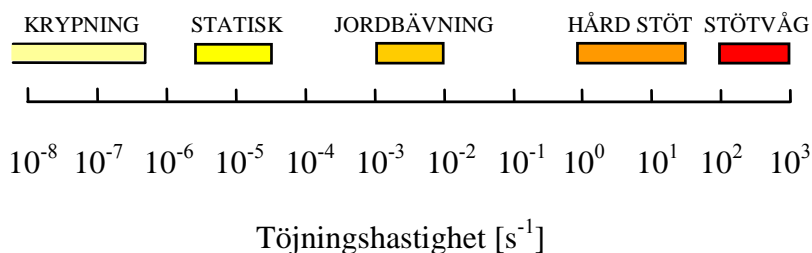


Figur 4:212a. Betongens spännings-töjningssamband vid varierande omslutningstryck. Baserad på triaxiella omslutningstryck från Bažant *et al.* (1996). Betongens enaxiella tryckhållfasthet är 46 MPa.

4:22 Dynamisk respons

För de flesta material förändras egenskaperna vid olika töjningshastigheter. Töjningshastighet definieras som töjning per tidsenhet. För statisk belastning är töjningshastigheten omkring 10^{-5} , vilket också är hastigheten i ett standardprov då hållfastheten bestäms. Figur 4:22a visar töjningshastigheten för andra vanliga belastningssituationer.

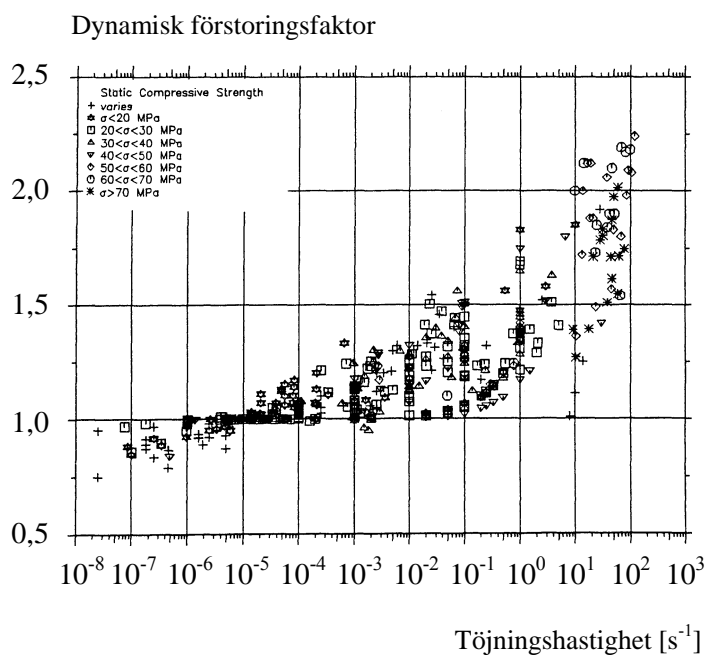
Splitterverkan



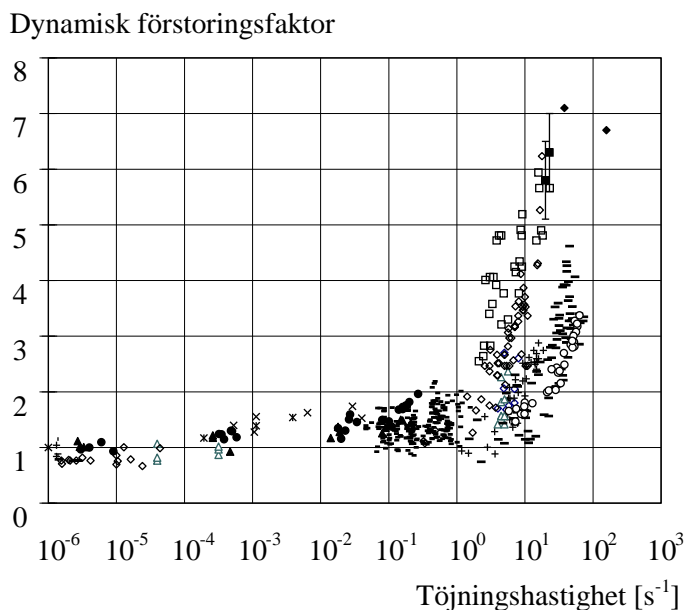
Figur 4:22a. Töjningshastighet i vanliga belastningssituationer, baserad på Bischoff och Perry (1991).

Betongens egenskaper vid dynamisk belastning ändras jämfört med statisk belastning. Vid snabba belastningar ökar töjningshastigheten i betongen, vilket medför att betongens styvhet och hållfasthet kan öka avsevärt.

Dynamisk förstoringfaktor är förhållandet mellan den dynamiska och den statiska hållfastheten. Vid töjningshastigheter mer än 10, exempelvis vid stötvågs- och splitterbelastning, kan betongens tryckhållfasthet mer än fördubblas, se figur 4:22b. Motsvarande för drag kan den dynamiska förstoringfaktorn bli upp till sju, vilket visas i figur 4:22c.



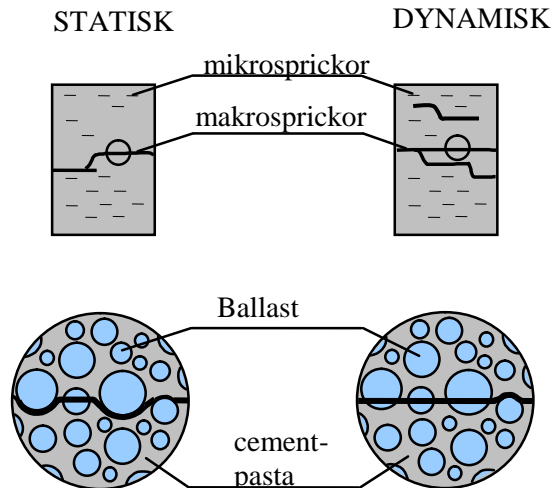
Figur 4:22b. Dynamisk förstoringfaktor som funktion av töjningshastighet för betong i tryck, experimentella resultat. Baserad på Bischoff och Perry (1991).



Figur 4:22c. Dynamisk förstöringsfaktor som funktion av töjningshastighet för betong i drag, experimentella resultat. Baserad på Malvar och Ross (1998).

Den förhöjda hållfastheten förklaras med att vid långsam belastning kan spricktillväxten ske genom att sprickan tar den väg som är mest energisparande, runt ballastkornen i betongen, vilket illustreras i figur 4:22d. Vid snabba belastningar tvingas sprickan gå en kortare väg och därmed genom ballastkornen. Betongen får därmed en högre hållfasthet.

Andra fysikaliska fenomen som förklarar den förhöjda hållfastheten är viskösa effekter och masströghetskrafter. Dessa brottmekanismer har en direkt koppling till betongens materialegenskaper. Ballasten i betongen är i regel betydligt styvare och starkare än cementpastan och eftersom sprickan tvingas gå igenom ballastkornen vid snabb belastning ökar betongens styvhet. En enskild spricka blir sprödare för dynamisk belastning. Dock, förändras sprickbilden vid dynamisk belastning och flera sprickor uppkommer, vilket medför att betongens totala energiupptagningsförmåga ökar.



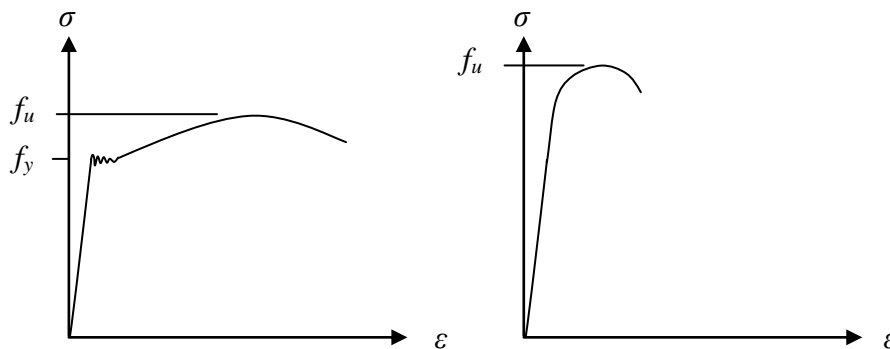
Figur 4:22d. Sprickutveckling vid statisk och dynamisk belastning. Baserad på Zielinski (1982).

4:3 Stål

4:31 Statisk respons

Armeringen kan indelas i två huvudgrupper: varmvalsad och kallbearbetad armering. Den varmvalsade armeringen har en elastisk del, en flytplatå och därefter en hårdnandefas. Draghållfastheten f_y sätts till dess flythållfasthet och brotthållfastheten f_u bestäms för den maximalt uppmätta kraften.

Den kallbearbetade armeringen saknar en flytplatå. Typisk spännings-töjnings samband för varmvalsad och kallbearbetad armering illustreras i figur 4:31.

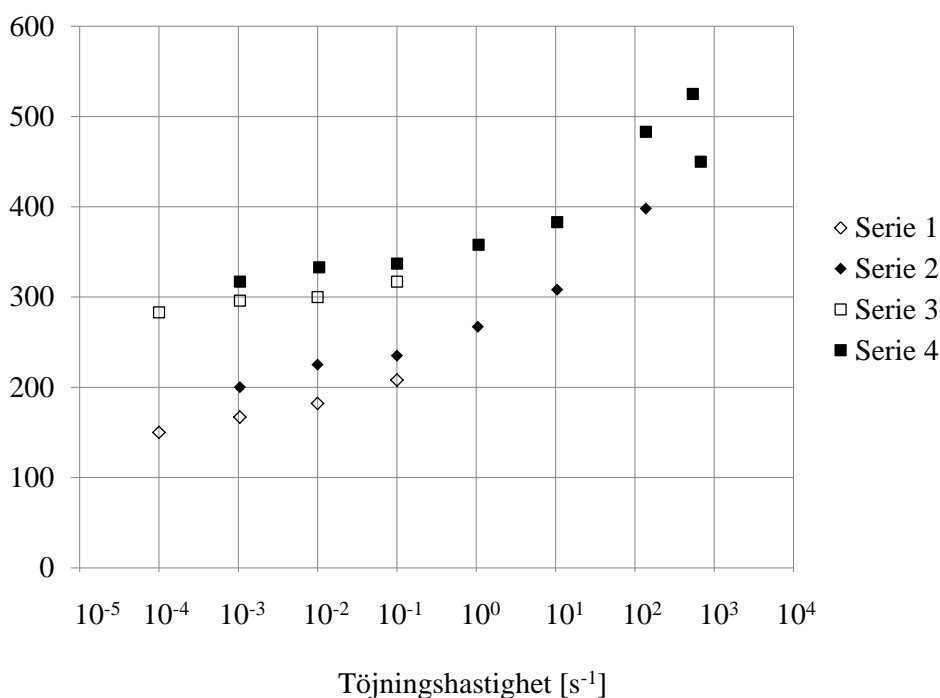


Figur 4:31. Stålets arbetskurva: till vänster varmvalsad, till höger kallbearbetad.

4:32 Dynamisk respons

Stål är mindre känsligt för dynamisk belastning än betong. Dock finns det en tydlig töjningshastighetseffekt även för stål. Figur 4:32a visar töjningshastighetens inverkan på den dynamiska hållfastheten för stål. Vid töjningshastigheter omkring 100 fås en hållfasthetsökning på ca 1,5-2.

Dynamisk hållfasthet [MPa]



Figur 4:32a. Töjningshastighetens inverkan på stål. Baserad på Rodríguez-Martínez *et al.* (2010).

4:4 Tillståndsekvation

4:41 Bestämning av tillståndsekvationen

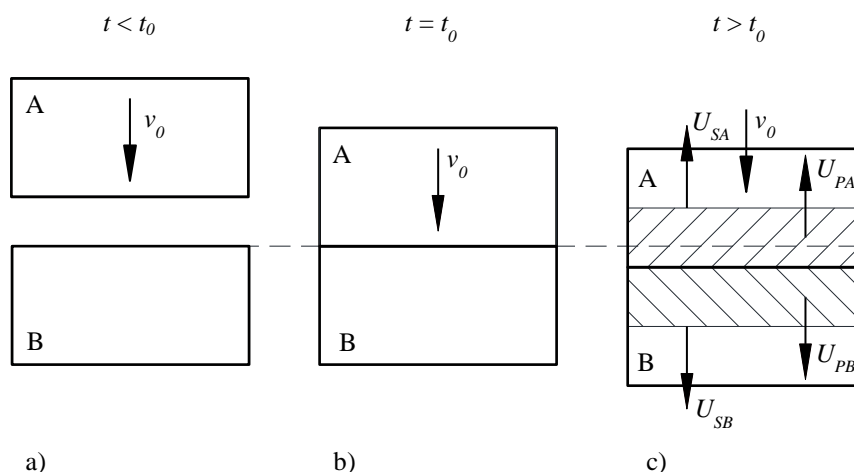
De tre grundläggande sambanden, konservering av massa, rörelsemängd och energi, beskrivs i avsnitt 2:5. Tillsammans med tillståndsekvationen kan materialets stötvågsp parametrar bestämmas. Tillståndsekvationen uttrycks på flera sätt i litteraturen, exempelvis som samband mellan tryck och partikelhastighet, eller stötvågshastighet och partikelhastighet, alternativt tryck och specifik volym (eller densitet). För metaller är det vanligt att uttrycka tillståndsekvationen som tryck och partikelhastighet eller stötvågshastighet och partikelhastighet. För betong och andra porösa material uttrycks dock vanligen tillståndsekvation som samband mellan tryck och specifik volym (eller densitet).

Splitterverkan

Statiska försök har en begränsning för hur höga tryck som kan genereras i ett material. För betong är denna gräns på omkring 1 000 MPa, se Herrmann *et al.* (2002). För att erhålla betongens kompletta tillståndsekvation erfordras dock trycknivåer på över 20 GPa.

För att bestämma materialets tillståndsekvation kan det göras på flera sätt. Antingen genom detonationsförsök, plan stötttest ("flyer plate test" på engelska) eller invers plan stötttest ("invers flyer plate test" på engelska). I denna rapport beskrivs endast principerna för "flyer plate tests". I Laine (2012) redovisas fler metoder för framtagning av tillståndsekvationen.

Principen för plan stötttest bygger på att en platta med kända materialegenskaper skjuts emot en platta med okända materialegenskaper enligt figur 4:41a. Genom att mäta hastigheten hos kropparna före och under stöten kan stötvågsparametrar beräknas fram genom att nyttja konserveringslagarna, samt materialets tillståndsekvation enligt avsnitt 2:5.



Figur 4:41a. Principen för "Flyer plate impact test". Figur baserad på Meyers (1994).

I figur 4:41a a) är anslagshastigheten v_0 för kropp A medan kropp B är stillastående. Vid anslaget, se b) i figur, vid tidpunkt t_0 genereras en stötvåg i båda kropparna. Stötvågsfronten, se c) i figur, har hastigheterna U_{SA} för kropp A och U_{SB} för kropp B. Partikelhastigheten bakom stötvågsfronten blir för kropp A anslagshastighet v_0 minus ΔU_{PA} . Eftersom kropp B står still innan den blir träffad av kropp A blir ändring i partikelhastighet ΔU_{PB} lika med partikelhastigheten U_{PB} . Nu kan ekvationer med plastisk stöt enligt avsnitt 2:6 nyttjas för att ta fram stötvågsparametrarna.

Jämvikt skall råda i kontaktytan mellan kropp A och B, vilket ger, se även ekvation (2:6a):

$$P_A = P_B \tag{4:41a}$$

Kontinuitetsvillkor enligt ekvation (2:6d) ger:

Splitterverkan

$$v_0 - \Delta U_{pA} = U_{pB} \quad (4:41b)$$

Trycket för kropp A kan uttryckas enligt ekvation (2:6b) som:

$$P_A = \rho_{0A} U_{sA} \Delta U_{pA} \quad (4:41c)$$

där

$$U_{sA} = C_{0A} + S_{1A} \Delta U_{pA} \quad (4:41d)$$

Materialkonstanterna C_{0A} och S_{1A} är kända innan försök och ändring i partikelhastighet kan uttryckas genom omskrivning av ekvation (4:41b) som:

$$\Delta U_{pA} = v_0 - U_{pB} \quad (4:41e)$$

och genom att mäta v_0 och U_{pB} under försöket kan U_{sA} bestämmas.

Trycket för kropp B kan uttryckas enligt ekvation (2:6c) som:

$$P_B = \rho_{0B} U_{sB} U_{pB} \quad (4:41f)$$

där

$$U_{sB} = C_{0B} + S_{1B} U_{pB} \quad (4:41g)$$

Med ekvation (4:41a), (4:41c) och (4:41f) fås:

$$\rho_{0A} U_{sA} \Delta U_{pA} = \rho_{0B} U_{sB} U_{pB} \quad (4:41h)$$

lös ut stötvågsfronten U_{sB} :

$$U_{sB} = \frac{\rho_{0A} U_{sA} (v_0 - U_{pB})}{\rho_{0B} U_{pB}} \quad (4:41i)$$

där U_{sA} beräknas enligt ekvation (4:41d) och (4:41e).

Tillståndsekvationen i en punkt kan nu bestämmas utifall anslagshastigheten v_0 och hastigheten (=partikelhastigheten) hos kropp B mäts under försökets gång. För att bestämma hela tillståndsekvationen för det okända materialet behöver flera försök utföras med varierande hastigheter. För metaller är sambandet mellan stötvågshastighet och partikelhastighet linjärt och i princip skulle det räcka med två försök. Dock, är dessa mätningar så pass komplexa att det krävs flera försök för att noggrant beskriva materialets tillståndsekvation.

Nu med det okända materialets tillståndsekvation, det vill säga sambandet mellan stötvågshastighet och partikelhastighet är kända, kan samtliga stötvågsparametrar beräknas fram.

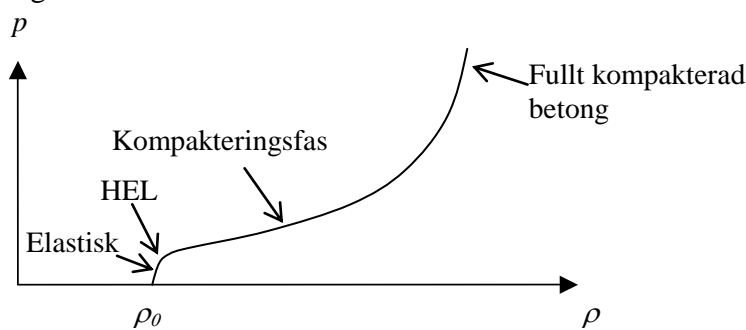
4:42 Tillståndsekvation för olika material

För porösa material såsom betong är inte sambandet mellan stötvågshastighet och partikelhastighet linjärt. Kurvanpassningen kan göras exempelvis med en polynomisk funktion.

Vid stötvågs- och splitterbelastning kan trycket bli avsevärt större än vid statisk belastning och betongens respons kan bli icke-linjär även vid ett hydrostatiskt spänningstillstånd. Med hydrostatiskt spänningstillstånd menas att samtliga tre huvudspänningskomponenter är lika. Trycket P definieras som:

$$P = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (4:42a)$$

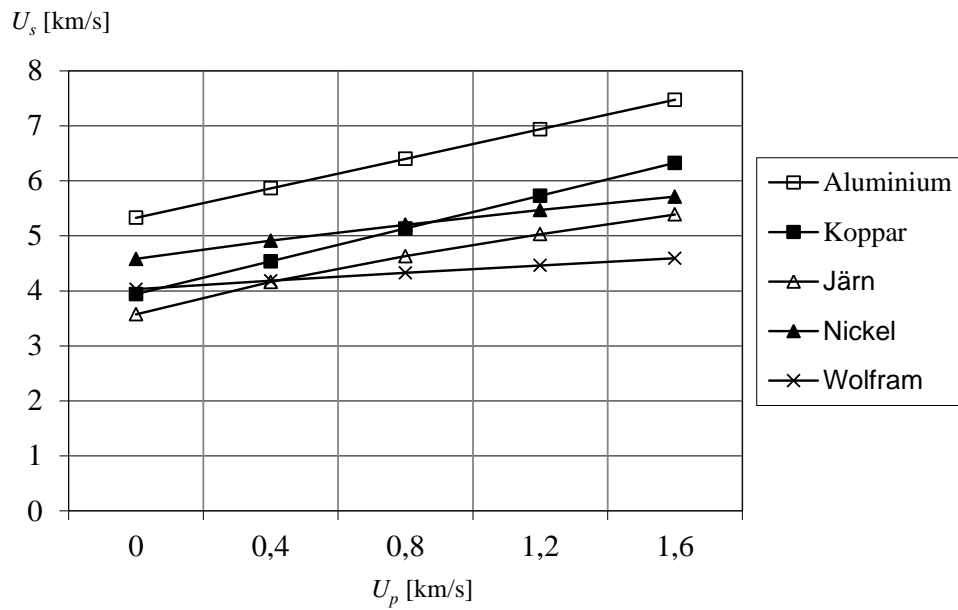
När betongen får detta icke-linjära beteende karakteriseras det med dess tillståndsekvation. För betong visas dess tillståndsekvation i figur 4:42a, som samband mellan tryck och densitet. För låga belastningar är förhållandet linjärt och för ökad belastning uppstår mikrosprickor i betongen och sambandet blir olinjärt. Denna punkt i tillståndsekvationen benämns som "HEL", vilket är förkortningen för "Hugoniot elastic limit". För avlastning under denna punkt återgår betongen till sin ursprungliga form, och vid vidare belastning börjar porerna i betongen kollapsa, vilket medför att responsen blir olinjär (betongen krossas/plasticerar). Vid ytterligare belastning fortsätter betongen att krossas tills alla porerna är kollapsade och responsen blir återigen linjär, vilket sker vid väldigt höga tryck, i storleksordning över 20 GPa.



Figur 4:42a. Principfigur för betongens tillståndsekvation.

För metaller är tillståndsekvation linjär, vilket visas för några vanliga metaller i figur 4:42b. Stötvågshastigheten ökar med ökad partikelhastighet. Värden finns tabulerade i Bilaga A:4, vilka är tagna från Meyers (1994).

Splitterverkan



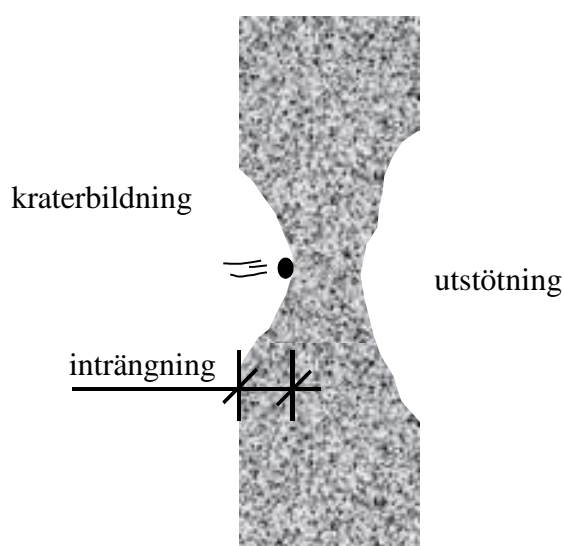
Figur 4:42b. Tillståndsekvation för några vanliga metaller. Baserad på värden från Meyers (1994).

5 Splitterverkan

5:1 Introduktion

När en bomb detonerar skapas en luftstötvåg och splitter i varierande storlek. Splitter som träffar ett mål kan antingen penetrera eller perforera målet. Penetration betyder splittrinträngning, medan perforation innebär att splittret tränger igenom konstruktionen. Under penetrationsförloppet närmast anslaget krossas betongen och kraterbildning sker, se figur 5:1a. Denna kraterbildning medför att betongens effektiva tjocklek minskas och därmed minskas även bärförmågan. Dessutom orsakas kraftig sprickbildning under penetrationsförloppet. Är penetrationsdjupet tillräcklig stor sker utstötning på baksidan av anslaget. Denna utstötning beror på den dragvåg som orsakas när stötvågen träffar konstruktionens baksida, se avsnitt 2:3.

Vidare kan splitter träffa armeringen som kan gå av eller skadas. Dessutom reduceras vidhäftningen mellan armering och betong på grund av vibrationerna i konstruktionen vid splittranslag.



Figur 5:1a. Skadefenomen i betong orsakad av splittrverkan.

5:2 Penetration

Penetrationsdjupet i olika material varierar. Engberg och Karevik (1987) redovisar ungefärligt penetrationsdjup av splitter i olika material i förhållande till penetration i stål, se tabell 5:2a. Presenterade värden är inte exakta utan tabellen skall användas som en första grov approximation av

Splitterverkan

förväntat penetrationsdjup. Exempelvis blir inträngningsdjupet enligt detta sex gånger större för en armerad betongkonstruktion jämfört med stål.

Tabell 5:2a. Penetrationsdjup för olika material, faktor av inträngning i mjukt kolstål (SIS 1311). Värden hämtade från Engberg och Karevik (1973).

Material	Faktor
Pansarplåt	0,75
Mjuk kolstål SIS1311	1,0
Aluminium	2
Glasfiberarmerad plast	4
Betong (K40 dubbelarmerad)	6
Furuträ	15
Sand	18
Vatten	50
Blöt snö	70
Torr snö	140

Enligt ConWep (1992) beräknas penetrationsdjupet x i [mm] för betong som:

$$x = \frac{26,9m_s^{0,37}v_s^{0,9}}{f_c^{0,25}} \quad \text{för } x \leq 117_s m_s^{1/3} \quad (5:2a)$$

och

$$x = \frac{4,35m_s^{0,4}v_s^{1,8}}{f_c^{0,5}} + 40,6m_s^{1/3} \quad \text{för } x > 117_s m_s^{1/3} \quad (5:2b)$$

där splittermassan, m_s är i [kg], hastigheten, v_s är i [m/s] och betongens tryckhållfasthet, f_c är i [Pa]. Ekvationerna är omskrivna från ConWep (1992), se Bilaga C:11.

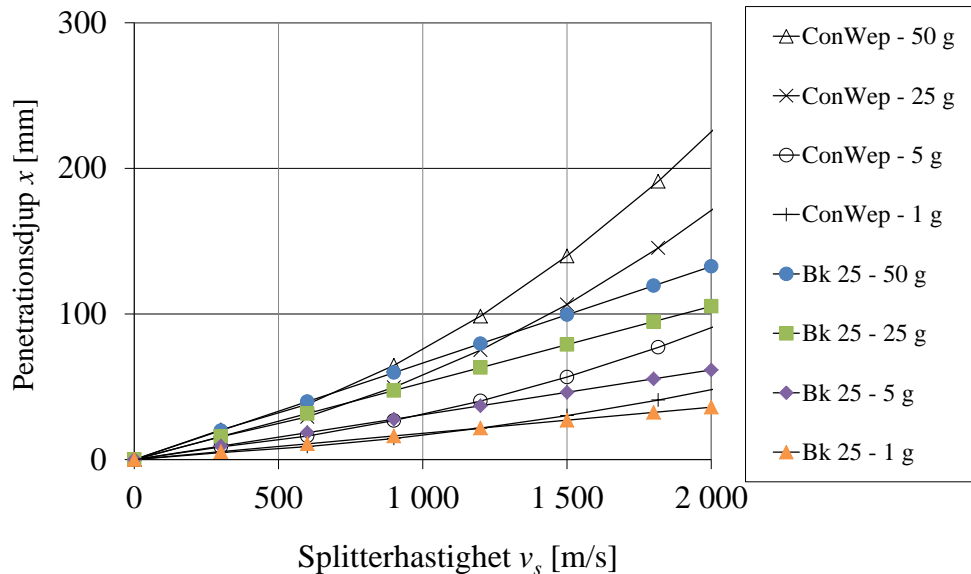
Enligt Bk 25 beräknas penetrationsdjupet, x i [m] som:

$$x = 180 \cdot 10^{-6} v_s m_s^{1/3} \quad (5:2c)$$

där v_s är splitter hastighet i [m/s] och m_s är splittermassa i [kg].

Splitterverkan

Penetrationsdjup enligt formler redovisade i ConWep (1992) med betongens tryckhållfasthet på 30 MPa och formler enligt Bk 25 sammanställs i figur 5:2a. För splitterhastigheter upp till ca 1 000 m/s blir penetrationsdjupet nästan detsamma med de olika empiriska sambanden. Dock ökar skillnaden i penetrationsdjup med ökad hastighet och massa enligt beräkning med ConWep.



Figur 5:2a. Penetrationsdjup i betong för varierande splittermassa och hastighet.

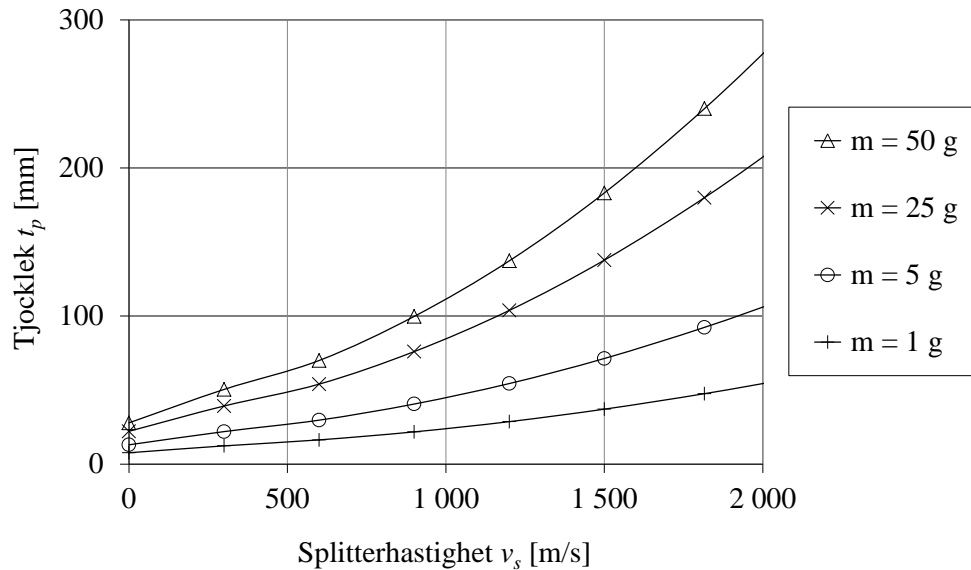
5:3 Perforation

Perforation innebär att splittret tränger igenom konstruktionen. Ekvation (5:3a) visar den minsta tjocklek hos konstruktion som erfordras för att förhindra perforation för varierande splittermassa och hastighet i betongkonstruktioner. Ekvationen är från Krauthammer (2000) och här omskriven till SI-enheter, omskrivningen härleds i Bilaga C:2. Figur 5:3a visar ekvationen (5:3a) för splittermassor vilka varierar från 1 gram upp till 50 gram, där anslagshastigheten varierar från 0 till 2 000 m/s. Exempelvis för ett splitter med massan 50 gram och anslagshastighet på 2 000 m/s erfordras en vägg tjocklek på 277 mm för att förhindra perforation.

$$t_p = 1,23xm_s^{0,033} + 74,9m_s^{0,33} \quad (5:3a)$$

där x beräknas enligt ekvation (5:2a-b).

Splitterverkan



Figur 5:3a. Minsta tjocklek hos betongkonstruktion som erfordras för att förhindra perforation för en varierandesplittermassa och hastighet.

5:4 Utstötning

Ett annat skadefenomen som kan ske av splitter och/eller stötvågsbelastning är utstötning. Utstötning innebär att betong slits loss på baksidan av den belastade konstruktionen. När en tryckvåg orsakad av exempelvis en infallande stötvåg eller splitter når änden av konstruktionen omvandlas denna till en dragvåg. Hur denna dragvåg skapas illustreras i figur 5:4a. Utfall draghållfastheten i betongen överskrids kan utstötning ske.

I figuren utsätts en betongvägg, omgiven av luft på framsidan och baksidan, för en triangelformad tryckvåg från vänster.

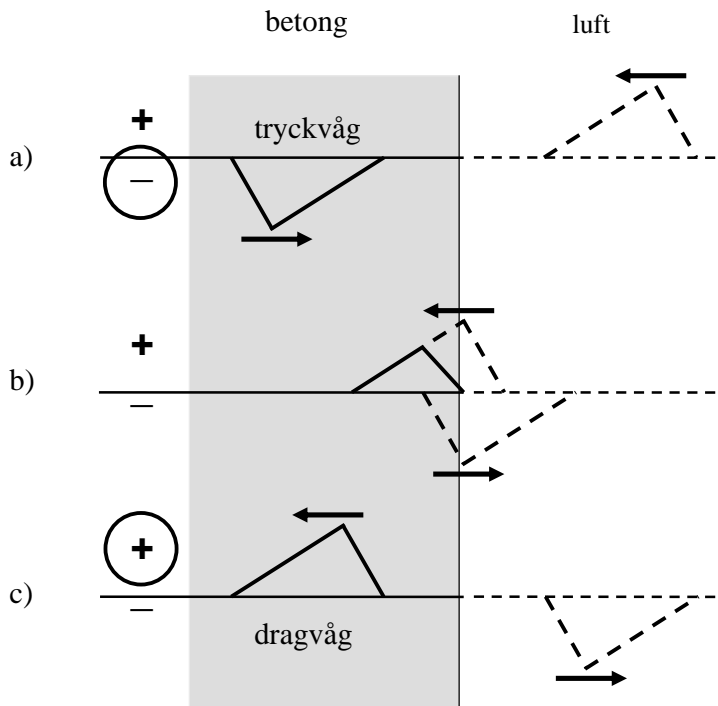
a) När en tryckvåg orsakad av stötvågs- och splitterbelastning träffar en betongvägg fortplantar sig lasten som en tryckvåg genom betongväggen (heldragen linje på negativ sida). Den streckade linjen symboliserar en fiktiv dragvåg på positiv sida med samma amplitud, hastighet och avstånd, som rör sig i motsatt riktning.

b) När tryckvågen når den bakre betongytan i gränsskiktet mellan vägg och luft reflekterar denna. Den reflekterade vågen byter tecken på grund av impedansskillnaden, se kapitel 2, mellan betong och luft i gränsskiktet och den infallande tryckvågen blir därmed en dragvåg. I figuren framställs detta som en fiktiv tryck- och dragvåg (streckade linjer) vilka superponeras till den heldragna linjen till en dragvåg.

c) Den reflekterade vågen fortplantar sig tillbaks i konstruktionen som en dragvåg. Eftersom betongens förmåga att motstå dragspänningar är betydligt sämre än dess förmåga att motstå tryckspänningar kan detta leda till att

Splitterverkan

den reflekterade dragvågen ger upphov till dragbrott varvid delar av betongväggens baksida kan lossna. Denna utstötning kan ske även om splitret inte har perforerat betongen.



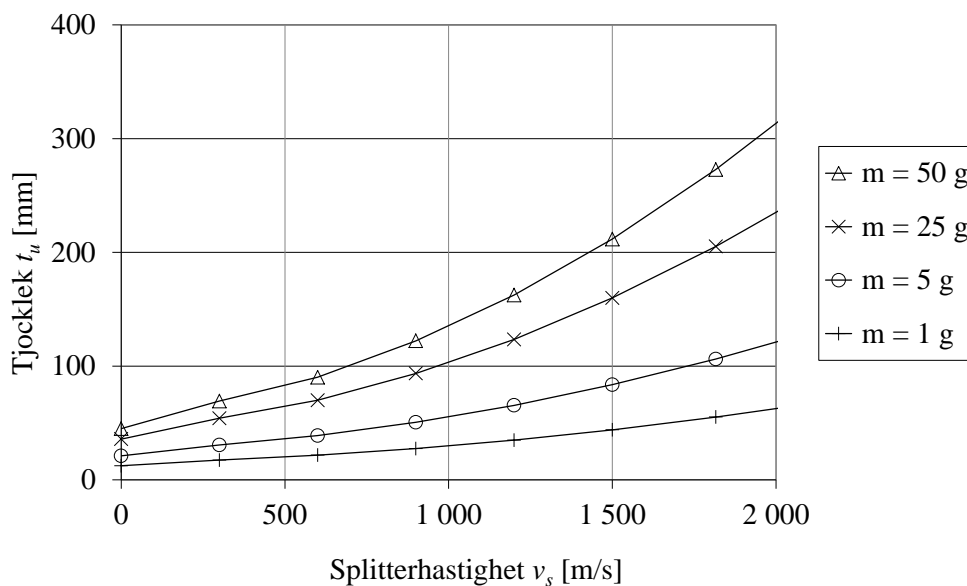
Figur 5:4a. Tryckvågens omvandling till en dragvåg vid fri ände.

Genom ett empiriskt samband enligt Krauthammer (2000) kan den minsta tjocklek hos en betongkonstruktion som erfordras för att förhindra utstötning för en varierande splittermassa och hastighet bestämmas enligt ekvation (5:4a). Ekvationen är omskriven till SI-enheter och härledning finns i Bilaga C:3.

$$t_u = 1,32xm_s^{0,033} + 121m_s^{0,33} \quad (5:4a)$$

där x bestäms ur ekvation (5:2a-b).

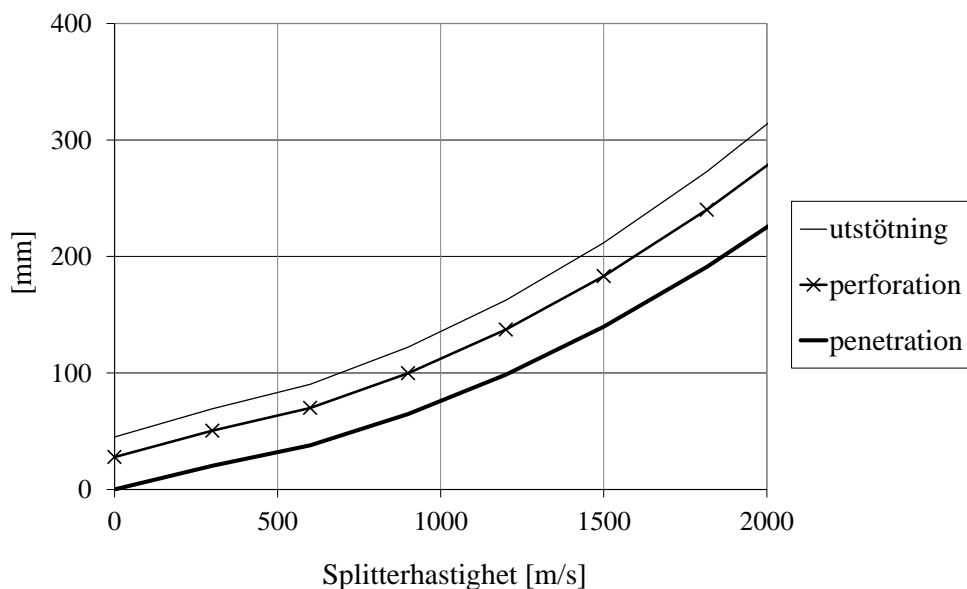
Splitterverkan



Figur 5:4b. Minsta tjocklek hos betongkonstruktion som erfordras för att förhindra utstötning för en varierande splittermassa och hastighet.

5:5 Jämförelse mellan skadefenomen

I figur 5:5a visas en jämförelse mellan penetrationsdjup, samt minsta erforderlig tjocklek för att förhindra utstötning och perforation för ett 50 grams splitter med varierande hastighet hos splittret.



Figur 5:5a. Jämförelse mellan penetrationsdjup och minsta erforderlig tjocklek för att förhindra utstötning och perforation för ett 50 gram splitter med varierande hastighet.

Ur figuren går det att utläsa för en given hastighet vilket penetrationsdjup, samt erforderlig tjocklek som krävs för att förhindra perforation och utstöt-

Splitterverkan

ning. Exempelvis för ett splitteranslag med 50 grams splitter och med hastigheten 1 500 m/s blir:

penetrationsdjup = 140 mm

erforderlig tjocklek för att förhindra perforation = 183 mm

erforderlig tjocklek för att förhindra utstötning = 212 mm

Resultatet visar att generellt sker utstötning först, medan för att förhindra perforation räcker det med en mindre tjocklek. I detta fall erfordras det en vägg tjocklek på 212 mm för att förhindra utstötning. I och med utstötningsskravet är uppfyllt kommer splittret inte att perforera väggen och inträngningsdjupet blir 140 mm för detta splitter.

Enligt Krauthammer (2000) finns en tumregel att ifall penetrationsdjupet är 70 % av konstruktionens tjocklek kan perforation förväntas. Tabell 5:5a visar hur väl denna tumregel stämmer överens med varierande splittermassa och hastighet. Tabellen visar värden för penetrationsdjup i procent av erforderlig tjocklek för att förvänta sig perforation. För att bestämma penetrationsdjup har ekvation (5:2a-b) nyttjats och för att bestämma erforderlig tjocklek för att förhindra perforation har ekvation (5:3a) nyttjats. Tumregeln stämmer väl överens för splitterhastigheter omkring 900 till 1 500 m/s. För lägre hastigheter än 900 m/s krävs dock en lägre grad av penetration, medan för högre hastigheter än 1 500 m/s krävs en högre grad av penetration av erforderlig tjocklek för att förvänta sig perforation. Det vill säga, generellt sett stämmer tumregeln mindre bra.

Tabell 5:5a. Tumregel: ifall penetrationsdjupet är 70 % av konstruktionens tjocklek kan perforation förväntas

v_s [m/s]	Penetration i % av perforation			
	Splittermassa [g]			
	1	5	25	50
0	0	0	0	0
300	39	39	40	40
600	54	54	54	54
900	66	66	65	65
1200	75	74	72	72
1500	81	79	77	76
1800	86	83	81	79
2100	89	86	83	82
2400	91	88	85	83
2700	93	90	86	84
3000	95	91	87	85

En annan tumregel enligt Krauthammer (2000) anger att ifall penetrationsdjupet är 50 % av konstruktionens tjocklek kan utstötning förväntas. Tabell

Splitterverkan

5:5b visar hur väl denna tumregel stämmer överens med varierande splittermassa och hastighet. Tabellen visar värden för penetration i procent av erforderlig tjocklek för att förvänta sig utstötning. För att bestämma penetrationsdjup har ekvation (5:2a-b) nyttjats och för att bestämma erforderlig tjocklek för att förhindra utstötning har ekvation (5:4a) nyttjats. Denna tumregel stämmer endast väl överens för splitterhastigheter omkring 900 m/s.

För lägre hastigheter än 900 m/s krävs en lägre grad av penetration, medan för högre hastigheter än 900 m/s krävs en högre grad av penetration av erforderlig tjocklek för att förvänta sig utstötning, dvs. tumregeln stämmer mindre bra.

Tabell 5:5b. Tumregel: ifall penetrationsdjupet är 50% av konstruktionens tjocklek kan utstötning förväntas.

v_s [m/s]	Penetration i % av utstötning			
	Splittermassa [g]			
	1	5	25	50
0	0	0	0	0
300	27	28	29	29
600	41	42	42	42
900	53	53	53	53
1200	62	61	61	61
1500	69	68	67	66
1800	74	72	71	70
2100	78	76	74	73
2400	81	78	76	75
2700	83	80	77	76
3000	85	82	79	77

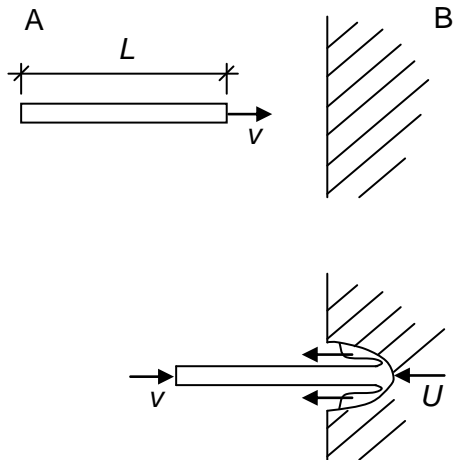
5:6 Höghastighetspenetration

Då projektiler kommer farande med högre hastigheter än i storleksordning 2 000 m/s till 3 000 m/s uppför sig projektilen och den träffade väggen mer eller mindre som vätskor. Fluidmekanik ger en grov uppskattning av inträngningsdjupet. Trycket i materialet blir betydligt högre än den dynamiska hållfastheten för materialet och inträngningen kommer att bero på projektilens och målmaterialens densitet.

För att beräkna inträngningsdjupet med fluidmekanik, studera figur 5:6a där en projektil träffar en vägg med hastigheten v . Välj koordinatsystem så att origo ligger i spetsen på projektilen och att väggen rör sig med hastigheten

Splitterverkan

U mot projektilen. Då förflyttas origo åt höger med hastigheten $v - U$, det vill säga projektilens hastighet minskar med U .



Figur 5:6a. Höghastighets penetration. Projektilen "äts" upp vid penetration.

Fluidmekanik ger enligt Bernoullis ekvation:

$$P = \frac{1}{2} \rho_A (v - U)^2 = \frac{1}{2} \rho_B U^2 \quad (5:6a)$$

där P är trycket, ρ är densitet (index A för projektilen och index B för väggen). För given anslagshastighet v och densitet för projektilen samt väggen kan U lösas ur ekvation (5:6a) som:

$$U = \frac{v}{1 + \left(\frac{\rho_B}{\rho_A} \right)^{1/2}} \quad (5:6b)$$

Tiden för projektilen att penetrera är dess längd L genom hastigheten som väggen "närmar" sig projektilen $v - U$:

$$t = \frac{L}{v - U} \quad (5:6c)$$

Inträngningsdjupet x beräknas som hastigheten U som väggen "närmar" sig projektilen multiplicerat med tiden, med ekvation (5:6b-c) fås:

Splitterverkan

$$\begin{aligned}x &= tU = \frac{L}{v-U}U = \frac{L}{U\left(1 + \left(\frac{\rho_B}{\rho_A}\right)^{1/2}\right) - U}U = \\ &= \frac{L}{1 + \left(\frac{\rho_B}{\rho_A}\right)^{1/2} - 1} = \frac{L}{\left(\frac{\rho_B}{\rho_A}\right)^{1/2}}\end{aligned}\tag{5:6d}$$

vilket ger inträngningsdjupet:

$$x = L\left(\frac{\rho_A}{\rho_B}\right)^{1/2}\tag{5:6e}$$

detta uttryck gäller om projektilen och väggen uppför sig som rena vätskor. Vid mycket höga hastigheter ger detta en första approximation av inträngningsdjupet. Formeln är endast giltig vid mycket höga hastigheter och inträngningsdjupet ökar ju högre densitet och längd är hos projektilen, samt ju lägre densitet det är i väggen.

6 Kombinerad stötvågs- och splitterbelastning

6:1 Introduktion

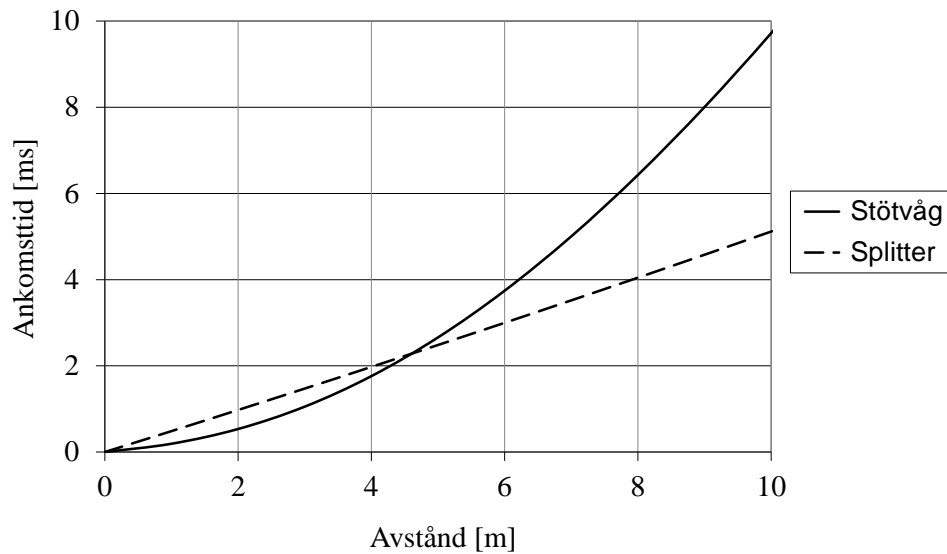
I detta avsnitt behandlas lasteffekten från stötvågsbelastning, splitterbelastning, och den kombinerade effekten av stötvågsbelastning och splitterbelastning. Vidare behandlas egenskaper hos ett bra skydd mot stötvågs- och splitterbelastning, samt ett exempel med kombinerad stötvågs- och splitterbelastning.

Vid en detonation av en bomb utbreder sig förutom stötvågen även splitter som kommer farande mot konstruktionen. Beroende på avståndet och detonationens storlek kan antingen stötvågen eller splittret träffa konstruktionen först, alternativt att de träffar konstruktionen samtidigt. För arkivbomben, se avsnitt 3:12, på ett avstånd upp till cirka 5 m kommer splittret att träffa konstruktionen innan stötvågen når fram och på längre avstånd kommer stötvågen att träffa före splittret, se figur 6:1a. Ankomsttid för stötvågen är beräknad enligt ConWep (1992), vilka även finns sammanställda i Johansson och Laine (2007). Ankomsttid t_a för splitter beräknas enligt ekvation (6:1a) som sträckan genom medelhastigheten för splittret:

$$v_{medel} = \frac{v_0 + v_r}{2}, t_a = \frac{s}{v_{medel}} \quad (6:1a)$$

där v_0 = utgångshastighet hos splitter enligt ekvation (3:5a).

v_r = hastighet hos splitter vid sträckan r i luften, se ekvation (3:5b).



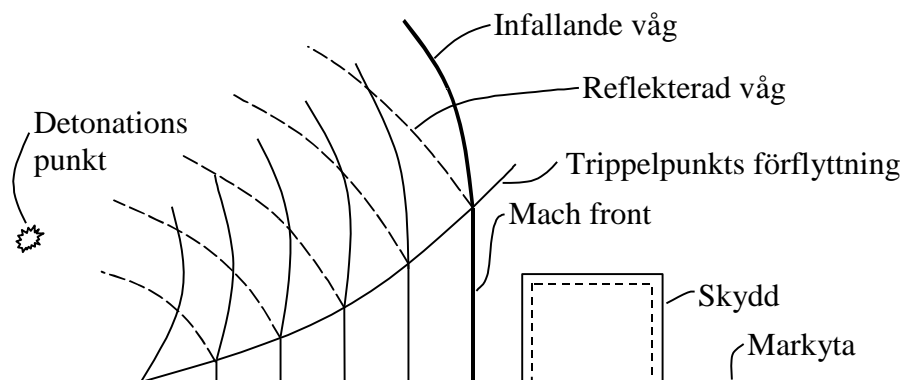
Figur 6:1a. Ankomsttid för arkivbomben med varierande avstånd mellan explosion och mål från splitter och stötvåg. Ankomsttid för stötvåg är beräknad med ConWep (1992). Ankomsttiden för splitter är beräknat för vikten 50 gram.

6:2 Översikt om stötvågsbelastning

Här förklaras kortfattat principerna för en stötvåg i luft genererad av en detonation. För en utförlig beskrivning om hur en luftstötvåg uppför sig hänvisas till Johansson (2002), Johansson och Laine (2007), samt hur en markstötvåg uppför sig till Laine (2012).

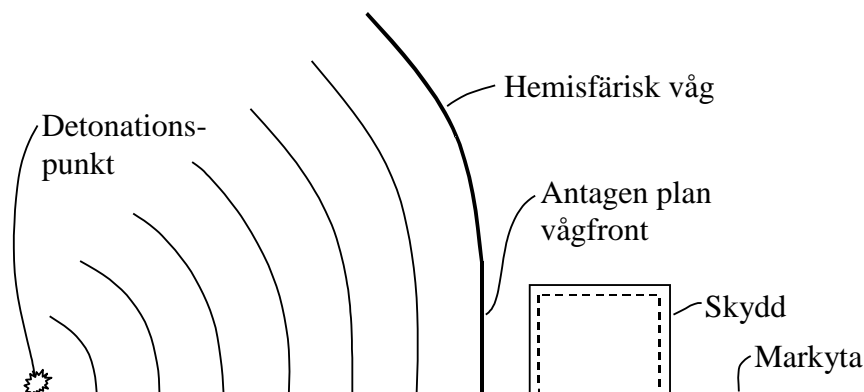
En stötvågs karaktär som är orsakad av en bomb skiljer sig åt om detonationen sker i luften eller om den sker vid markytan. Figur 6:2a visar hur stötvågen bildas för detonation i luft. När den infallande stötvågen träffar marken reflekteras denna. När den reflekterade stötvågen når en kritisk vinkel sker inte längre en reflexion utan stötvågen glider istället längs marken och skapar en tredje stötvåg vilket benämns Machfront. Trippelpunkten är korsningspunkten mellan den infallande och den reflekterade stötvågen samt Machfronten. Machfronten reser sig längs linjen för den stigande trippelpunkten och kan betraktas som en plan våg.

Splitterverkan



Figur 6:2a. Schematisk bild av stötvågsutbredning för detonation i luft. Från Leppänen (2004), baserad på Krauthammer (2000).

När en detonation sker vid markytan sker reflexionen av stötvågen omedelbart, vilket illustreras i figur 6:2b, en så kallad hemisfärisk våg. Efter en relativt kort sträcka kan denna stötvåg approximeras till en plan våg. Eftersom detonationen sker vid markytan är den volym som stötvågen kan breda ut sig på endast hälften så stor som i fallet med detonation i luft med fri sfärisk utbredning, vilket benämns spegling, se Johansson (2002). Detta innebär också att energin blir dubbelt så stor för en detonation vid markytan än vid en detonation i luft med fri sfärisk utbredning, eftersom stötvågen är förhindrad att gå ned i marken. Dock blir speglingskvoten alltid lägre än 2 vid en detonation i mark eftersom en del av den frigjorda energin från laddningen i verkligheten går ned i marken.

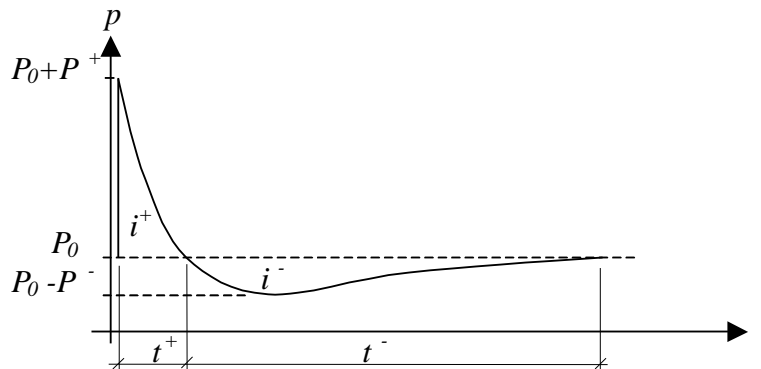


Figur 6:2b. Stötvågsutbredning för detonation på mark. Från Leppänen (2004), baserad på Krauthammer (2000).

Tryck-tidskurvan hos en ideal stötvåg illustreras i figur 6:2c. Illustrationen är en förenkling av tryck-tidssambandet av en detonation. Sambandet kan delas in i två huvudfaser: den positiva och den negativa faser. I den positiva faser ökar trycket från det omgivande trycket P_0 till $P_0 + P^+$. För ostörd luft är P_0 omkring 101,2 kPa (atmosfärstryck). Tryckökningen sker nästan momentant och den positiva faser varar under tiden t^+ tills trycket faller ner till det omgivande trycket P_0 . Den positiva impulstätheten i^+ är arean under den positiva faser. Den negativa faser inleds när trycket har fallit till det

Splitterverkan

omgivande trycket P_0 och varar under tiden t^- . Det maximala undertrycket minskar till $P_0 - P^-$, vilket är betydligt lägre än det positiva trycket. Den negativa impulstätheten i^- är arean under negativa fasen.



Figur 6:2c. Principiell tryck-tidssamband för en ideal stötvåg.

Den positiva impulstätheten i^+ , övertrycket P^+ samt varaktigheten t^+ är viktiga parametrar vid beskrivandet av en stötvågs styrka och utseende. För fri stötvågsutbredning i luft beror dessa främst på detonationens storlek (mängden explosivämnen) och avstånd från detonationen.

Följande exponentiella uttryck som ofta nyttjas beskriver tryck-tidskurvan för den positiva fasen:

$$P(t) = P_0 + P^+ \left(1 - \frac{t}{t^+}\right) e^{-\alpha t/t^+} \quad (6:2a)$$

Genom att välja ett värde på α går det att beskriva olika tryck-tidskurvor från en stötvåg. α kan bestämmas utgående från i^+ , P^+ och t^+ samt uttryck i ekvation (6:2c).

Ekvation (6:2a) förenklas ofta med en triangulär tryck-tidskurva enligt följande, vilket ger en god approximation av tryck-tidskurvan i de flesta praktiska fall så länge impulstätheten är densamma. Ekvationen är endast giltig i den positiva fasen:

$$P(t) = P_0 + P^+ \left(1 - \frac{t}{t^+}\right) \quad (6:2b)$$

Impulstätheten för den positiva fasen kan beskrivas med följande ekvation, enligt Johansson (2002):

$$i^+ = P^+ t^+ \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha}) \right) \quad (6:2c)$$

Den negativa fasen har mindre betydelse för konstruktionens uppförande, den är dock viktig vid dimensionering av exempelvis pansarglas. Den behandlas inte vidare i denna rapport.

6:3 Skydd mot stötvågs- och splitterbelastning

6:31 *Introduktion*

Skyddskonstruktioner är ofta byggda i betong. Dessa byggs massiva för att kunna öka dess energiupptagningsförmåga mot explosionsbelastning och förhindra utstötning och perforation av splitter. Vänds frågan till vilka materialegenskaper som är önskvärda för ett skyddsrum finner vi ganska snart att betong inte är det bästa skyddande materialet. Betongen klarar av tryckbelastning bra, och för att kunna motstå dragbelastning behövs armering. I och med betongens låga draghållfasthet ökar risken för kraterbildning och utstötning för dessa extrema belastningar, vilket medför att betongens effektivhöjd minskar. Utifrån dessa kriterier ställs frågan varför nyttjas betongkonstruktioner i så stor utsträckning och varför inte bygga exempelvis massiva stålkonstruktioner istället? En enkel förklaring är att betong är billigt att bygga med, betongen har stor massa vilket är positivt och en väl-dimensionerad armerad betongkonstruktion fungerar utmärkt som en skyddande konstruktion, där armeringen möjliggör segt verknings sätt hos konstruktionen.

En konstruktions förmåga att motstå en explosion beror på ett flertal faktorer, såsom dess massa, val av material, dimensioner, dess randvillkor och framför allt dess deformationsförmåga. I avsnitt 6:32 beskrivs egenskaper hos ett bra skydd mot explosionsbelastning.

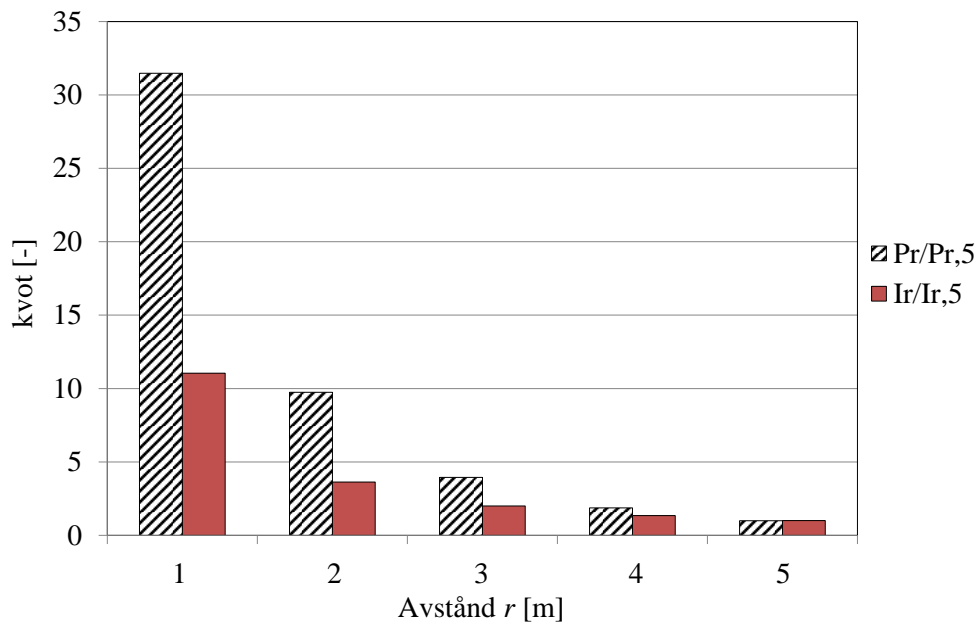
6:32 *Egenskaper hos bra skydd*

Vid en explosion är det bästa skyddet att befinna sig så långt bort från explosionen som möjligt, dock är detta inte alltid möjligt. Exempel på sådana situationer kan vara transport av farligt gods eller byggnader med explosionsfarliga ämnen eller i händelse av krig eller terrorverksamhet där målsättningen är att träffa målet.

Oavsett hur explosionen sker är avståndet en mycket viktig faktor för belastningen på byggnaden. Figur 6:32a-b visar hur det reflekterade trycket och den reflekterade impulstätheten varierar med varierat avstånd från en laddning med 125 kg TNT. Figur 6:32a visar resultat för 1 till 5 m och figur 6:32 b visar resultat för 5 till 10 m. Resultaten visas som en kvot mellan tryck och impulstäthet för redovisade avstånd jämfört med tryck och impulstäthet från en laddning på 5 m avstånd från explosionscentrum.

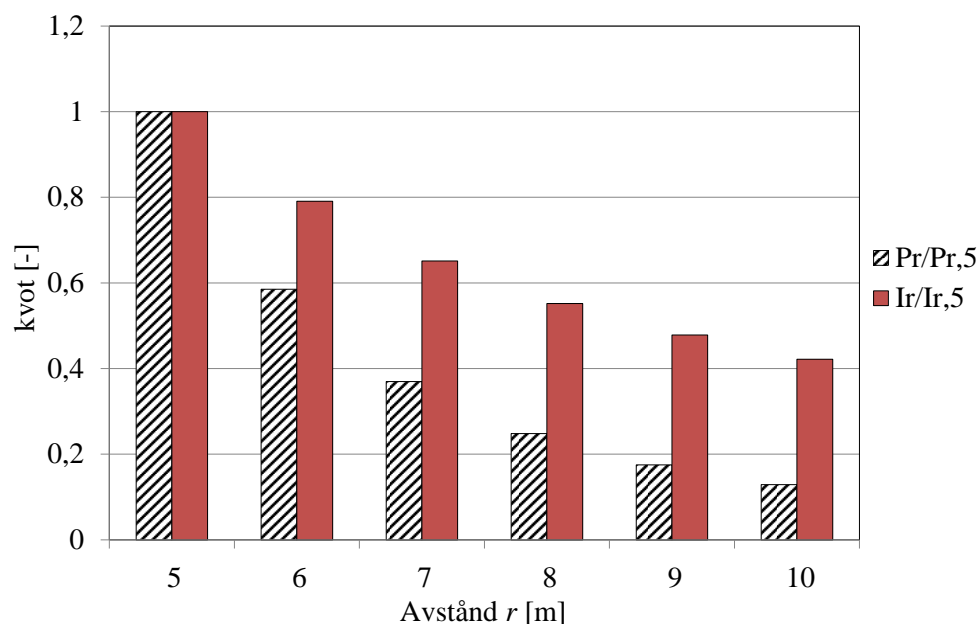
Splitterverkan

Resultaten visar att det reflekterade trycket ökar respektive minskar väldigt snabbt med minskad respektive ökad avstånd till explosionscentrum. Exempelvis för avstånd på ca 4 m har det reflekterade trycket fördubblats, medan för ett avstånd på drygt 6 m har det reflekterade trycket halverats. Motsvarande resultat fås för variationen med olika avstånd för impulstätheten. Dock är denna ökning respektive minskning något långsammare. En fördubbling av impulstätheten fås på avståndet ca 3 m respektive en halvering av impulstätheten fås på avståndet ca 9 m till explosionscentrum.



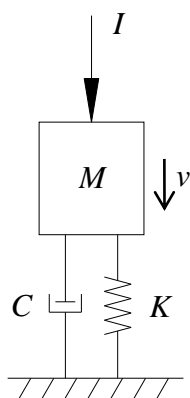
Figur 6:32a. Inverkan av avstånd från explosionscentrum. Reflekterat tryck och reflekterad impulstäthet uttryckt som en kvot i förhållande till tryck och impulstäthet för en laddning på 5 m avstånd innehållande 125 kg TNT, beräknad enligt ConWep (1992). Resultat för avstånd mellan 1 m och 5 m.

Splitterverkan



Figur 6:32b. Inverkan av avstånd från explosionscentrum. Reflekerat tryck och reflekterad impulstäthet uttryckt som en kvot i förhållande till tryck och impulstäthet för en laddning på 5 m avstånd innehållande 125 kg TNT, beräknad enligt ConWep (1992). Resultat för avstånd mellan 5 m och 10 m.

För att förstå hur en byggnad kan motstå en explosion kan energiprincipen nyttjas enligt Johansson och Laine (2009). Enligt denna motstår byggnaden en explosionslast ifall den inre energin är i balans med den pålagda energin. Principen för detta kan förklaras med en SDOF-modell enligt figur 6:32c. SDOF kommer från engelska "Single Degree Of Freedom". Modellen består av en massa M , dämpare C och en fjäderstyvhet K . Systemet belastas med impulsen I och kroppen får hastigheten v .



Figur 6:32c. SDOF-modell för lastens energi innehåll.

Systemets energiinnehåll av den yttre lasten I kan uttryckas som den kinetiska energin:

Splitterverkan

$$E_k = \frac{M \cdot v^2}{2} \quad (6:32a)$$

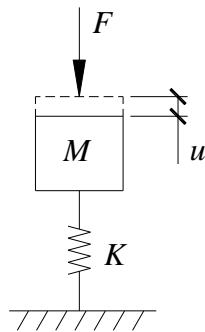
Lagen om rörelsemängd ger impulsen:

$$I = M \cdot v \quad (6:32b)$$

Lös ut hastigheten ur ekvation (6:32b) och insättning i ekvation (6:32a) fås rörelseenergin från en impulsbelast som:

$$E_k = \frac{I^2}{2M} \quad (6:32c)$$

Konstruktionens respons kan studeras med ett enfrihetsgradssystem enligt figur 6:32d. Modellen består av en massa M och en fjäderstyvhet K . Systemet belastas med en yttre kraft F , vilket ger en förskjutning u för kroppen. Dämpningen beaktas ej i systemet, eftersom den första svängningen ger upphov till den största förskjutningen och inverkan av denna därför är liten.



Figur 6:32d. SDOF-modell för elastisk energiupptagning.

Den inre energin E_i , tøjningsenergin, är arean under spännings-tøjningssambandet enligt figur 6:32e. Spännings-tøjningssambandet kan även uttryckas som ett kraft-deformationssamband. Detta görs genom följande:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (6:32d)$$

ger

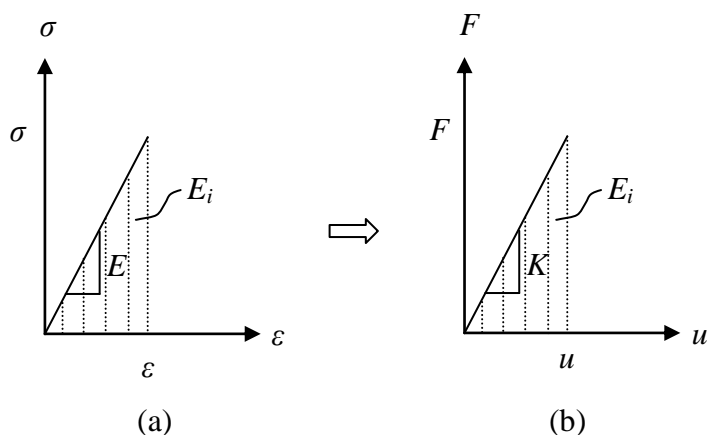
$$\frac{F}{A} = E \frac{u}{L} \quad (6:32e)$$

och kraften F kan uttryckas som

$$F = Ku \quad (6:32f)$$

där

$$K = \frac{EA}{L} \quad (6:32g)$$



Figur 6:32e. Inre energiupptagning hos elastiskt material, (a) spänning-töjningskurva, (b) kraft-deformationssamband.

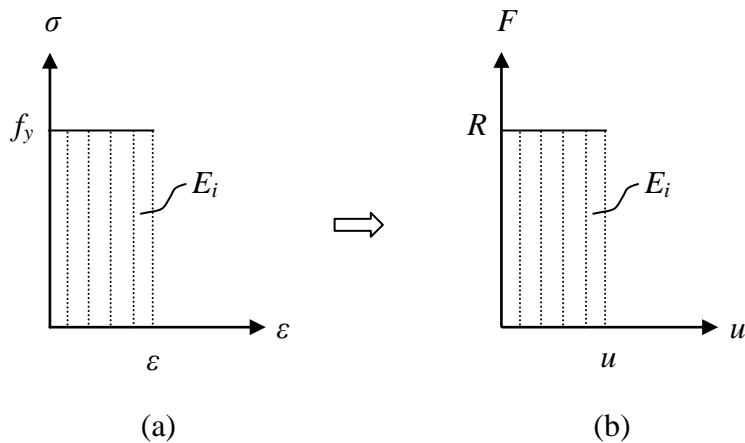
För elastisk respons beräknas den inre energin som arean under kraft-deformationssambandet eller som arean under spännings-töjningskurvan (jämför avsnitt 2:442), vilket kan uttryckas som:

$$E_i = \int_0^v \frac{1}{2} \sigma \varepsilon dV = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon AL = \frac{1}{2} \frac{F}{A} \frac{u}{L} AL = \frac{1}{2} Fu = \frac{1}{2} Ku^2 \quad (6:32h)$$

För plastisk respons fås på motsvarande sätt att den inre energi är arean under spännings-töjningssambandet, vilket illustreras i figur 6:32f. Spänningen är lika med flytspänningen när kroppen plasticerar. Detta ger att för kraft-deformationssambandet blir R lika med den yttre kraften F_y när plasticering sker.

Kapaciteten R blir lika med den yttre kraften F_y då plasticering sker:

$$R = F_y = f_y A \quad (6:32i)$$



Figur 6:32f. Inre energiupptagning hos plastiskt material för ett enfrihetsgradssystem, (a) spännings-töjningskurva, (b) kraft-deformationssamband.

Den inre energin blir:

$$E_i = \int_0^v \sigma \varepsilon dV = \sigma \varepsilon AL = \frac{R}{A} \frac{u}{L} AL = Ru \quad (6:32j)$$

där

$$\sigma = f_y \quad (6:32k)$$

Utifrån ovanstående resonemang ökar byggnadens motståndsförmåga med ökad deformationsförmåga. Genom att sätta den yttre lastens energiinnehåll i balans med den inre lastens energiinnehåll kan den elastiska respektive den plastiska deformationen beräknas.

Den elastiska responsen fås genom att sätta den inre elastiska energin lika med den yttre energin enligt ekvationerna (6:32c) och (6:32h);

$$\frac{1}{2} Ku^2 = \frac{I^2}{2M} \quad (6:32l)$$

den elastiska förskjutningen u_{el} kan lösas ut som

$$u_{el} = \frac{I}{M\omega} \quad (6:32m)$$

där

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (6:32n)$$

Den plastiska responsen fås genom att sätta den inre plastiska energin lika med den yttre energin enligt ekvationerna (6:32j) och (6:32h):

$$Ru = \frac{I^2}{2M} \quad (6:32o)$$

den plastiska förskjutningen u_{pl} kan lösas ut som

$$u_{pl} = \frac{I^2}{2RM} \quad (6:32p)$$

Utifrån ekvation (6:32m) och (6:32p) kan följande slutsatser dras. Ju högre yttre last desto större deformation erfordras för att erhålla energibalans i konstruktionen. Stor massa är gynnsamt för ett bra skydd. Vidare för elastisk respons blir styvheten en viktig faktor, medan för plastisk respons är flythållfastheten och deformationsförmåga viktiga faktorer för byggnadens motståndsförmåga för explosionsbelastning.

Ovanstående resonemang gäller för ett enfrihetsgradssystem. En verklig balk kan omvandlas till ett enfrihetsgradssystem enligt avsnitt 6:42. För den verkliga balken kommer även randvillkor och balkens geometri att påverka den slutgiltiga deformationen.

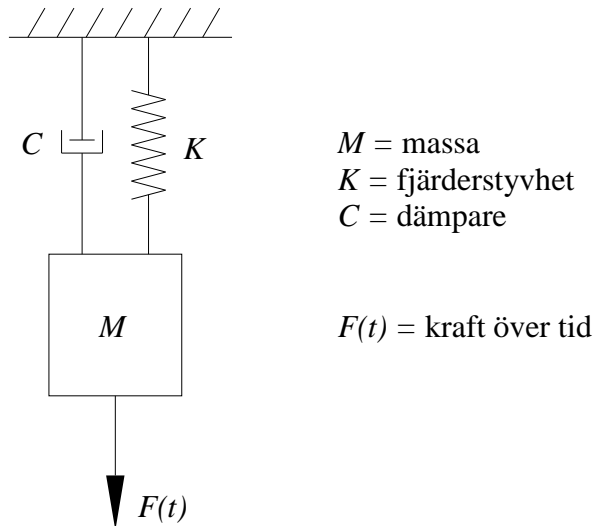
För att möjliggöra stora deformationer erfordras ett segt verknings sätt hos konstruktionen. Vidare finns för en konstruktion en gräns för tillåten deformation, vilket behandlas vidare i Johansson och Laine (2009).

6:4 Impulsbelastning

6:41 *Enfrihetsgradssystem (SDOF)*

För att beräkna responsen för impulsbelastade konstruktioner kan detta göras med en så kallad SDOF-modell. Modellen är en enfrihetsgradssystem och här ges kortfattad översikt om modellen. Viktiga referenser som nyttjats är Nyström (2006) och Johansson och Laine (2009), i vilka ges en utförlig beskrivning SDOF-modellen.

Splitterverkan



Figur 6:41a. SDOF-modell.

Enfrihetsgradssystemets rörelseekvation tecknas som:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F(t) \quad (6:41a)$$

Där u, \dot{u} och \ddot{u} betecknar förskjutning, hastighet och acceleration. Rörelseekvationen kan skrivas som:

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega u = \frac{F(t)}{M} \quad (6:41b)$$

där vinkelfrekvensen ω kan räknas ut som:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (6:41c)$$

och dämpningskoefficienten ξ kan räknas ut som:

$$\xi = \frac{C}{2M\omega} \quad (6:41d)$$

Den allmänna lösningen till rörelseekvationen är:

$$u(t) = A\sin \omega t + B\cos \omega t \quad (6:41e)$$

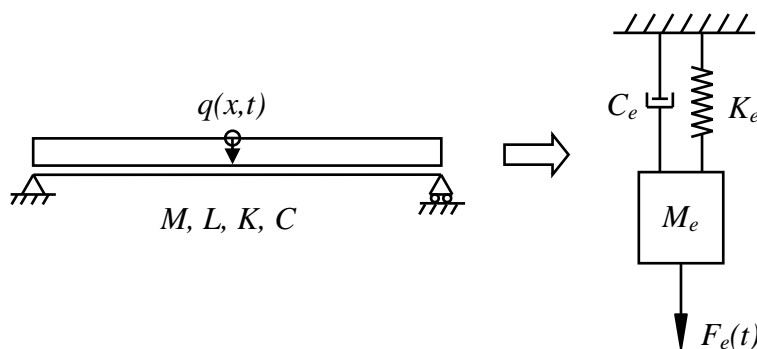
Hastigheten beräknas som första tidsderivatan av förskjutningen:

$$v(t) = \dot{u}(t) = A\omega\cos \omega t - B\omega\sin \omega t \quad (6:41f)$$

I visade exempel i denna rapport löses rörelseekvationen med en numerisk metod, varav någon vidare lösning på den allmänna rörelseekvationen inte presenteras. Den numeriska metoden som nyttjas presenteras i Bilaga D:11 (explicit central differensmetod).

6:42 Omvandling från balk till SDOF

För att räkna på balkar och plattor kan SDOF-modellen nyttjas. Dock uppför sig inte en balk som ett enfrihetsgradssystem där förskjutning, hastighet och acceleration sker i en systempunkt. Figur 6:42a illustrerar omvandlingen från balk till enfrihetsgradssystem. I SDOF-modellen tilldelas balken nya egenskaper där förskjutning, hastighet och acceleration studeras i en systempunkt. Vanligtvis är denna systempunkt placerad i balkmitt där förskjutningarna blir som störst.



Figur 6:42a. Omvandling från balk till enfrihetsgradssystem.

För ett linjärelastiskt material kan rörelseekvationen för balken tecknas utifrån den allmänna rörelseekvationen i 6:41a som:

$$M_e \ddot{u}_s + C_e \dot{u}_s + K_e u_s = F_e(t) \quad (6:42a)$$

där

$$M_e = \kappa_M M \quad (\text{ekvivalent massa}) \quad (6:42b)$$

$$C_e = \kappa_C C \quad (\text{ekvivalent dämpare}) \quad (6:42c)$$

$$K_e = \kappa_K K \quad (\text{ekvivalent styvhet}) \quad (6:42d)$$

$$F_e = \kappa_F F(t) \quad (\text{ekvivalent last}) \quad (6:42e)$$

där κ_M , κ_C , κ_K och κ_F är omvandlingsfaktorer för att beskriva ekvivalent massa, dämpning, styvhet och last för balkens rörelseekvation.

Splitterverkan

$F(t)$ är den totala lasten på balken. För en punktlast är $F(t) = F(t)$ och för en utbredd last är $F(t) = q(t)L$.

u_s, \dot{u}_s och \ddot{u}_s avser förskjutning, hastighet respektive acceleration i systempunkten för balkens ekvivalenta rörelseekvation.

För balkens ekvivalenta rörelseekvation väljs M_e på så sätt att rörelseenergin i systemet bevaras. Lasten F_e väljs så att samma yttre arbete krävs i systempunkten som för den verkliga balken att deformera. På motsvarande sätt väljs styvheten K_e för systemet så att resulterande deformation utträttar samma inre arbete för den verkliga balken jämfört med det ekvivalenta enfrihetsgradssystemet.

Ekvation (6:42a) kan nu skrivas om till:

$$\kappa_M M \ddot{u}_s + \kappa_C C \dot{u}_s + \kappa_K K u_s = \kappa_F F(t) \quad (6:42f)$$

Vid beräkning med impulslast försummas ofta dämpningen eftersom den i sammanhanget har liten inverkan på den maximala deformationen i den första svängningen. Ekvation (6:42f) kan då förenklas till:

$$\kappa_M M \ddot{u}_s + \kappa_K K u_s = \kappa_F F(t) \quad (6:42g)$$

genom att dela ekvation (6:42g) med κ_F fås:

$$\kappa_{MF} M \ddot{u}_s + \kappa_{KF} K u_s = F(t) \quad (6:42h)$$

$$\text{där } \kappa_{MF} = \frac{\kappa_M}{\kappa_F} \text{ och } \kappa_{KF} = \frac{\kappa_K}{\kappa_F} \quad (6:42i)$$

enligt Johansson och Laine (2009) går det att visa att

$$\kappa_K = \kappa_F \quad (6:42j)$$

och ekvation (6:42h) kan ytterligare förenklas till:

Linjärelastisk:

$$\kappa_{MF} M \ddot{u}_s + K u_s = F(t) \quad (6:42k)$$

För ett idealplastiskt material fås motsvarande rörelseekvation:

$$\kappa_{MF} M \ddot{u}_s + R = F(t) \quad (6:42l)$$

där R är den inre mothållande kraften.

Genom att ha kännedom om κ_{MF} , balkens geometri, massa, styvhet, samt lasten som funktion av tiden kan balkens nedböjning, hastighet och acceleration över tiden beräknas. En numerisk lösning till ekvationerna (6:42k) och (6:42l) finns i Bilaga D:11.

Värden för κ_{MF} för olika randvillkor, dels för en punktlast och dels för en utbredd last, redovisas i Bilaga D:12.

6:43 Omvandlingsfaktorer

6:431 Bakgrund till omvandlingsfaktorer

Omvandlingsfaktorerna härleds utifrån grundläggande samband: bevarande om rörelseenergi samt yttre och inre arbete. I denna rapport ges endast en sammanfattning till bakgrunden för omvandlingsfaktorer. Härledning av omvandlingsfaktorerna återfinns i Johansson och Laine (2009).

Nedan ges en kortfattad beskrivning av hur κ_M , κ_K och κ_F kan härledas utifrån bevarande av rörelseenergi och bevarande av inre och yttre arbete.

6:432 Massa

Omvandlingsfaktorn för massan kan härledas utifrån att SDOF-modellen erhåller samma rörelseenergi som den studerade balken. Rörelseenergin tecknas som:

$$E_k = \frac{M_e \cdot v_s^2}{2} = \int_0^L \frac{v^2}{2} \rho A dx \quad (6:432a)$$

där

M_e är den ekvivalenta massan hos enfrihetsgradssystemet

$v_s = \Delta u_s / \Delta t$ är systempunktens hastighet i enfrihetsgradssystemet

ρ är densitet hos balken

A är tvärsnittsarean för balken

$v = \Delta u / \Delta t$ är balkens hastighet i godtycklig punkt

Den ekvivalenta massan M_e kan nu tecknas som:

$$M_e = \int_0^L \left(\frac{u(x,t)}{u_s(t)} \right)^2 \rho A dx \quad (6:432b)$$

Omvandlingsfaktorn för massan definieras som

$$\kappa_M = \frac{M_e}{M} \quad (6:432c)$$

och denna kan tecknas som (för en balk med konstant densitet och tvärsnittsarea):

$$\kappa_M = \frac{1}{M} \int_0^L \rho A \left(\frac{u(x,t)}{u_s(t)} \right)^2 dx = \frac{1}{L} \int_0^L \left(\frac{u(x,t)}{u_s(t)} \right)^2 dx \quad (6:432d)$$

Omvandlingsfaktorn för massan är beroende på vilken utböjningsform som antas för balken. Därmed blir den även beroende på randvillkor och belastningen hos den verkliga balken. Exempelvis fås olika omvandlingsfaktorer för en fritt upplagd balk jämfört med en fast inspänd balk, eller om dessa är belastade med en punktlast alternativt en utbredd last.

6:433 Last

Omvandlingsfaktorn för lasten härleds på så sätt att lasten i enfrihetsgradssystemet utträttar samma arbete som de verkliga lasterna utträttar på balken.

Den totala yttre lasten tecknas som:

$$F(t) = \int_0^L q(x,t) dx \quad (6:433a)$$

där $q(x,t)$ är lasten fördelad på balken över tiden t .

Den ekvivalenta lasten F_e för enfrihetsgradssystemet skall vara så stor att den i systempunkten utträttar samma yttre arbete som för den verkliga balken utträttar vid en förskjutning Δu . Ökning av yttre arbetet tecknas som:

$$F_e(t) \cdot \Delta u_s(t) = \int_0^L \Delta u(x,t) q(x,t) dx \quad (6:433b)$$

vilket kan skrivas som:

$$F_e(t) = \int_0^L \frac{u(x,t)}{u_s(t)} q(x,t) dx \quad (6:433c)$$

Omvandlingsfaktorn för lasten definieras som:

$$\kappa_F = \frac{F_e}{F} \quad (6:433d)$$

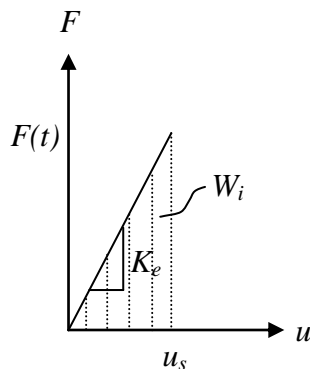
och kan beräknas som:

$$\kappa_F = \frac{\int_0^L \frac{u(x,t)}{u_s(t)} q(x,t) dx}{\int_0^L q(x,t) dx} \quad (6:433e)$$

Omvandlingsfaktorn för lasten beror också på utböjningsformen. På samma sätt som för omvandlingsfaktorn för massan blir även denna faktor beroende på randvillkor och belastning.

6:434 Inre styvhet för linjärelastiskt material

Omvandlingsfaktorn för styvheten härleds utifrån att den inre kraften i det ekvivalenta systemet uträttar lika stort deformationsarbete som den verkliga balken. Detta arbete kommer att skilja sig beroende på responsen hos den verkliga strukturen. För elastiskt material ökar kraften linjärt och det inre arbetet är arean under kraft-deformationskurvan i figur 6:434a. För rent plastiskt material blir det inre arbetet en inre mothållande kraft multiplicerad med deformationen.



Figur 6:434a. Inre arbetet för en enfrihetsgradssystem för elastiskt material.

För enfrihetsgradssystemet beräknas deformationsarbetet för elastiskt material som:

$$W_i^{SDOF} = \int_0^{u_s} K_e \xi d\xi = \frac{K_e u_s^2}{2} \quad (6:434a)$$

Deformationsarbetet för balken beräknas som:

$$W_i^{balk} = \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{\beta T^2}{GA} + \frac{M^2}{EI} \right) dx \quad (6:434b)$$

Där första termen i intergralen beaktar inverkan av normalkraft och andra termen beaktar inverkan av tvärkraft.

Splitterverkan

Styvheten hos balken är beroende på lasten och bestäms genom att sätta den inre mothållande kraften lika med den totala lasten enligt följande:

$$K \cdot u_s = \int_0^L F(t) dx \quad (6:434c)$$

Omvandlingsfaktorn för inre styvheten definieras som:

$$\kappa_K = \frac{K_e}{K} \quad (6:434d)$$

Ifall inverkan av normalkraft och tvärkraft försummas fås:

$$\kappa_K = \frac{1}{u_s EI} \frac{\int_0^L (M(x))^2 dx}{\int_0^L F(t) dx} \quad (6:434e)$$

6:435 *Inre styvhet för stelplastiskt material*

För plastiskt material fås det inre deformationsarbetet som:

$$W_i^{SDOF} = \int_0^{u_i} R_e d\xi = \int_0^{u_i} \kappa_K R d\xi = \kappa_K R u_s \quad (6:435a)$$

och omvandlingsfaktorn kan härledas till:

$$\kappa_K = \frac{1}{R u_s} \int_0^L M(x) u''(x) dx \quad (6:435b)$$

Med kännedom omvandlingsfaktorerna kan balkens rörelseekvation tecknas och för en godtycklig impulsbelastning kan balkens rörelse beräknas.

6:5 **Exempel på kombinerad stötvågs- och splitterbelastning**

6:51 *Problemställning*

6:511 Lösningmetod

I detta kapitel visas ett exempel av kombinerad stötvågs- och splitterbelastning på en balk. Balkens geometri och materialegenskaper visas i av-

snitt 6:512. Balken omvandlas till ett enfrihetsgradssystem och rörelse-ekvationen (6:42k) löses numeriskt. Den numeriska lösningen lyder:

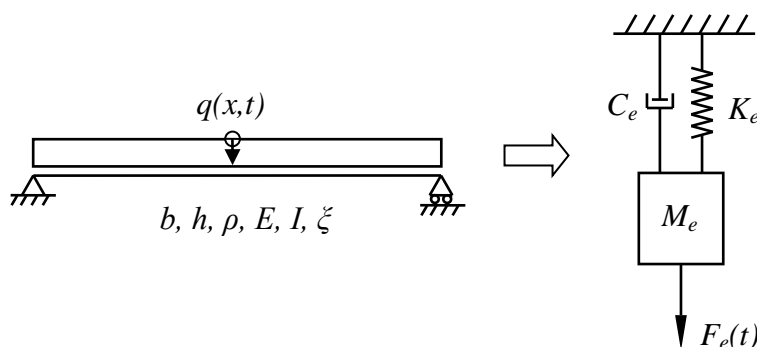
$${}^{t+\Delta t}u = \left(\frac{1}{\Delta t^2}\right)^{-1} \left(F(t) - \left(K - \frac{2\kappa_{MP}M}{\Delta t^2} \right) u - \left(\frac{\kappa_{MP}M}{\Delta t^2} \right) u \right) \quad (6:511a)$$

och är även redovisad i Bilaga D:11.

Lösningen stegar sig fram i tiden. För en stabil lösning skall Δt ej överskrida ett kritiskt tidssteg, detta visas i avsnitt 6:54. Vidare är inte ekvationen självstartande och det erfordras ett startsteg vilket redovisas i Bilaga D:11. $F(t)$ är belastningen vilket består av en kombinerad stötvågs- och splitterbelastning. Stötvågsbelastningen beräknas i avsnitt 6:52 och splitterbelastningen beräknas i avsnitt 6:53. Dessa superponeras i avsnitt 6:54 där konstruktionens respons för detta redovisas.

6:512 **Balkens geometri och materialdata**

En fritt upplagd balk i figur 6:512a belastas med impulslast. Balkens geometri och materialegenskaper redovisas i tabell 6:512a. Indata till enfrihetsgradssystemet redovisas i tabell 6:512b.



Figur 6:512a. Exempel balk utsatt för impulslast, samt omvandling till SDOF-modell.

Splitterverkan

Tabell 6:512a. Balkens geometri och materialdata.

Geometri		
L	2,7 m	längd
h	0,35 m	höjd
B	1,0 m	bredd
ρ	2 400 kg/m ³	densitet
m	$bh\rho = 840$ kg/m	massa/m
M	$mL = 2\,268$ kg	massa

Materialegenskaper		
E_c	30 GPa	betongens elasticitetsmodul
f_c	30 MPa	betongens tryckhållfasthet
E_s	200 GPa	armeringens elasticitetsmodul
f_{st}	500 MPa	armeringens hållfasthet
A_s	1 005 mm ² /m	armeringsarea ($\phi 16$ s200)
d	310 mm	effektivhöjd

Tabell 6:412b. Indata till enfrihetsgradssystemet.

M_e	$\kappa_{MP} \cdot M = 1\,512$ kg	massa
κ_{MP}	2/3	enligt Bilaga D:12
K^*	R_m/u_s	sekantstyvhet
C	0	dämpning (försummas)

* Sekantstyvheten beräknas ur R .

Maximalt inre mothållande kraft R_m för en fritt upplagd balk beräknas som:

$$R_m = \frac{8 \cdot M_{Rd}}{L} = \frac{8 \cdot 151,6}{2,7} = 449 \text{ kN} \quad (6:512a)$$

där M_{Rd} är statisk momentkapacitet och beräknas som:

$$x = \frac{f_{st} A_s}{0,8 f_c b} = 21 \text{ mm} \quad (6:512b)$$

$$M_{Rd} = f_{st} A_s (d - 0,4x) = 151,6 \text{ kNm} \quad (6:512c)$$

Elastisk styvhet för en fritt upplagd balk med jämnt utbredd last beräknas som:

$$K_{el} = \frac{384 EI}{5 L^3} \quad (6:512d)$$

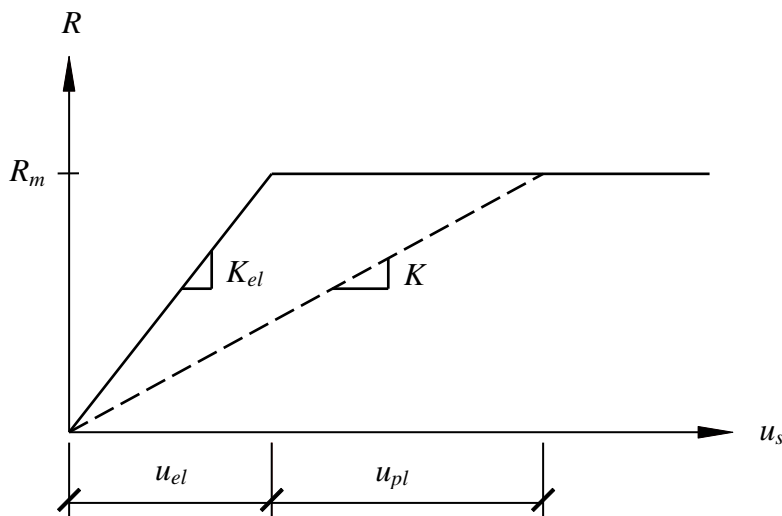
Vilket ger maximal elastisk deformation som:

$$u_{el} = \frac{R_m}{K_{el}} \quad (6:512e)$$

För att erhålla elasto-plastiskt beteende beräknas sekantstyvheten K som:

$$K = \frac{R_m}{u_s} = \frac{K_{el}(u_s - u_{pl})}{u_{el} + u_{pl}} \quad (6:512f)$$

det vill säga att styvheten minskar då balken plasticerar, vilket illustreras i figur 6:512b. Utifall den plastiska deformationen u_{pl} är noll fås linjärelastisk respons. Detta är ett sätt att simulera elasto-plastiskt uppförande för balken. För elastisk respons fås ekvation (6:512f) till $K = K_{el}$ eftersom $u_s = u_{el}$ när den plastiska deformationen $u_{pl} = 0$.



Figur 6:512b. Sekantstyvhet hos SDOF-modell.

Den elastiska styvheten, se ekvation (6:512d), är beroende på om betongen är osprucken (stadium I) eller sprucken (stadium II). För osprucken betong försummas armeringens bidrag och tröghetsmomentet beräknas som:

$$I_I = \frac{bh^3}{12} \quad (6:512g)$$

För sprucken betong försummas inverkan av dragen betong och tröghetsmomentet beräknas som:

$$I_{II} = \frac{bx^3}{3} + \alpha \cdot A_s(d-x)^2 \quad (6:512h)$$

där x är tryckzonshöjden i betongen och α är kvoten mellan elasticitetsmodul för stål och betong.

Splitterverkan

Den elastiska sekantstyvheten varierar därmed för osprucken och sprucken betong enligt följande:

$$K_{el} = \frac{384 EI}{5 L^3} \quad (6:512i)$$

Där I beräknas enligt ekvation (6:512g) för osprucken betong och enligt ekvation (6:512h) för sprucken betong.

6:52 Stötvågsbelastning

Stötvågsbelastning, trycket över tiden, kan beräknas med ConWep (1992) med följande formel:

$$P(t) = P_0 + P_s^+ \left(1 - \frac{t - t_a}{t^+}\right) e^{-(t-t_a)/\alpha} \quad (6:52a)$$

Belastningen i detta exempel är arkivbomben med följande indata:

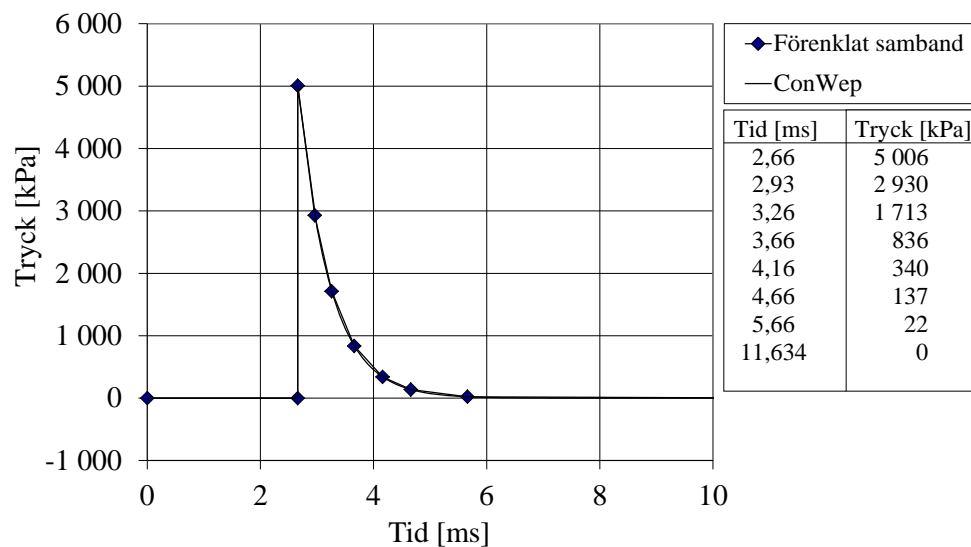
Bombens vikt $M_b = 250$ kg

Höljets vikt $M_h = 125$ kg

Mängden sprängämne, TNT $W = 125$ kg

ger $t^+ = 8,974$ ms och $t_a = 2,66$ ms, och $\alpha = 0,5983$, se avsnitt 6:2 för förklaringar.

Last-tidskurvan använd för arkivbomben visas i figur 6:52a. Impulstätheten blir 2 795 Pas, värdet avser den reflekterade impulstätheten.



Figur 6:52a. Stötvågsbelastning från arkivbomb. Reflekterad tryck-tids samband.

Splitterverkan

Den totala impulsen består av impulslast från stötvåg samt impulslast från splitter. När bomben fragmenteras, det vill säga när splittret skapas, förbrukas energi och impulslasten från stötvåg minskar jämfört med en ren TNT-laddning utan hölje. Detta beaktas enligt nedan.

Energimängd hos arkivbomben E_b kan beräknas enligt följande formel:

$$E_b = 4610 \cdot W = 4610 \cdot 125 = 576 \text{ MJ} \quad (6:52b)$$

där 4610 kJ/kg är energimängd för TNT enligt Bulson (1997) och W är laddningsvikten.

Den kinetiska energin för splitter blir:

$$E_{k,splitter} = \frac{M_h \cdot v_0^2}{2} = \frac{125 \cdot 2075^2}{2} = 269 \text{ MJ} \quad (6:52c)$$

där utgångshastighet hos splitter beräknas enligt ekvation (3:5a) som:

$$\begin{aligned} v_0 &= 2400 \cdot (1 - e^{-2W/M_h}) \\ &= 2400 \cdot (1 - e^{-2 \cdot 125/125}) = 2075 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (6:52d)$$

Den totala energimängden hos arkivbomben består av energimängd för att skapa en stötvåg och energimängd för att skapa kinetisk energi hos splitter. Energimängd hos stötvågen E_s beräknas som:

$$E_s = E_b - E_{k,splitter} = 576 - 269 = 307 \text{ MJ} \quad (6:52e)$$

Vilket motsvarar en ekvivalent laddningsvikt W_{ekv} som genererar en impulslast från stötvåg:

$$W_{ekv} = \frac{E_s}{4610} = \frac{307 \cdot 10^3}{4610} = 66,6 \text{ kg} \quad (6:52f)$$

Den totala impulsen i_{tot} beräknas som summan av impulslast från stötvåg $i_{stötvåg}$ och impulslast från splitter $i_{splitter}$ som:

$$i_{tot} = i_{stötvåg}(W_{ekv}) + i_{splitter}(W) \quad (6:52g)$$

Nu kan impulslasten från stötvågen beräknas med följande indata:

Mängden ekvivalent sprängämne, TNT $W_{ekv} = 66,6 \text{ kg}$

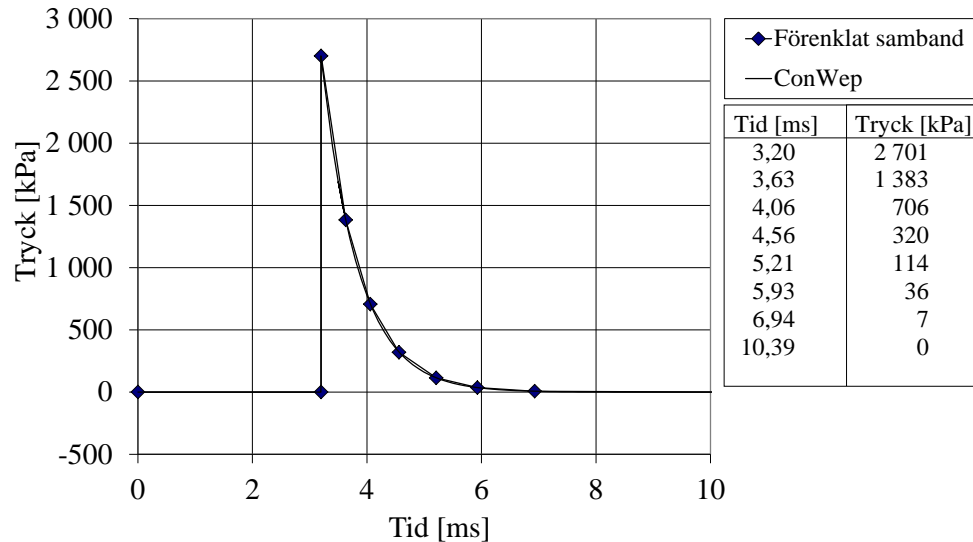
Trycket över tiden beräknas enligt ConWep som:

Splitterverkan

$$P(t) = P_0 + P_s^+ \left(1 - \frac{t - t_a}{t^+}\right) e^{-(t - t_a)/\alpha} \quad (6:52h)$$

där $T^+ = 7,193$ ms, $t_a = 3,196$ ms och $\alpha = 0,712$, se avsnitt 6:2 för förklaringar.

Impulsbelastning från stötvågen visas i figur 6:52b. Impulstätheten blir 1 730 Pas, värdet avser den reflekterade impulstätheten.



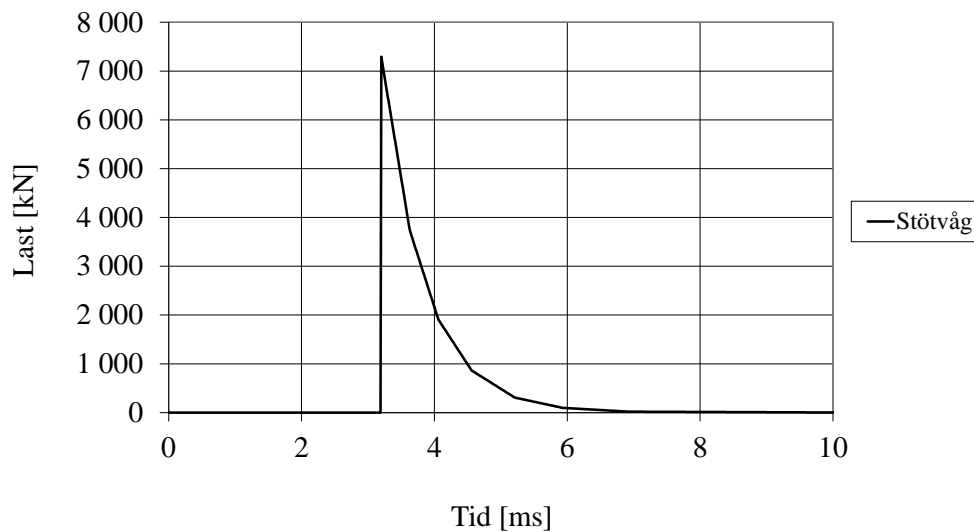
Figur 6:52b. Impulsbelastning från stötvågs exklusive splitterbelastning från arkivbomb. Reflekterad tryck-tidssamband.

Den totala impulsen på balken fås som impulstätheten multiplicerat med arean för balken:

$$I_{stövåg} = i \cdot A = i \cdot L \cdot b = 1730 \cdot 2,7 \cdot 1,0 = 4671 \text{Ns} \quad (6:52i)$$

Lasten över hela balken fås som:

$$F(t) = q(t) \cdot A = q(t) \cdot L \cdot b = q(t) \cdot L, \text{ då } b = 1,0 \text{ m.} \quad (6:52j)$$



Figur 6:52c. Impuls från stötvågsbelastning exklusive splitterbelastning från arkivbomb på en balk med längden 2,7 m och bredden 1,0 m.

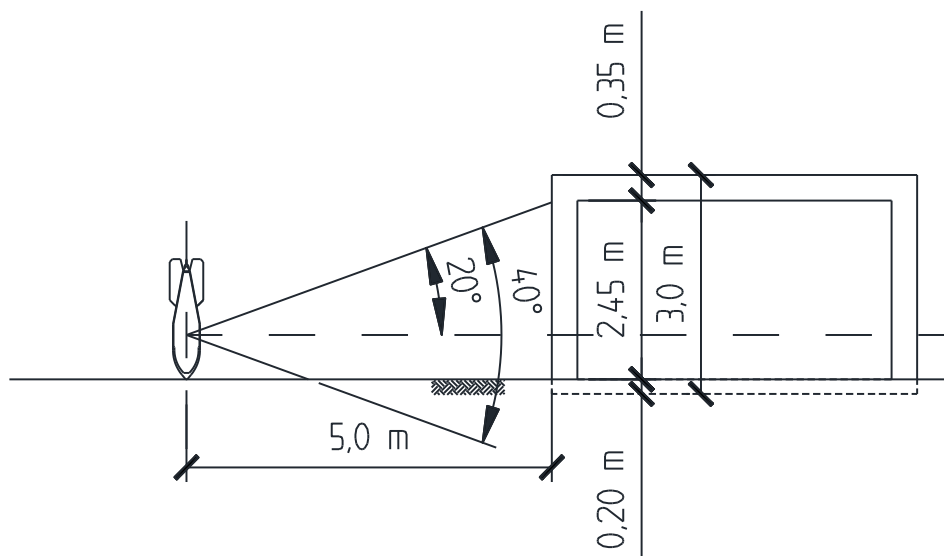
6:53 Splitterbelastning

Impulsen från ett splitter är dess massa multiplicerat med dess hastighet. För ett enstaka splitter blir impulsen mycket låg jämfört med impulsen från luftstötvågen. För ett splitter med massan 50 g och hastigheten 1 950 m/s fås den totala impulsen som:

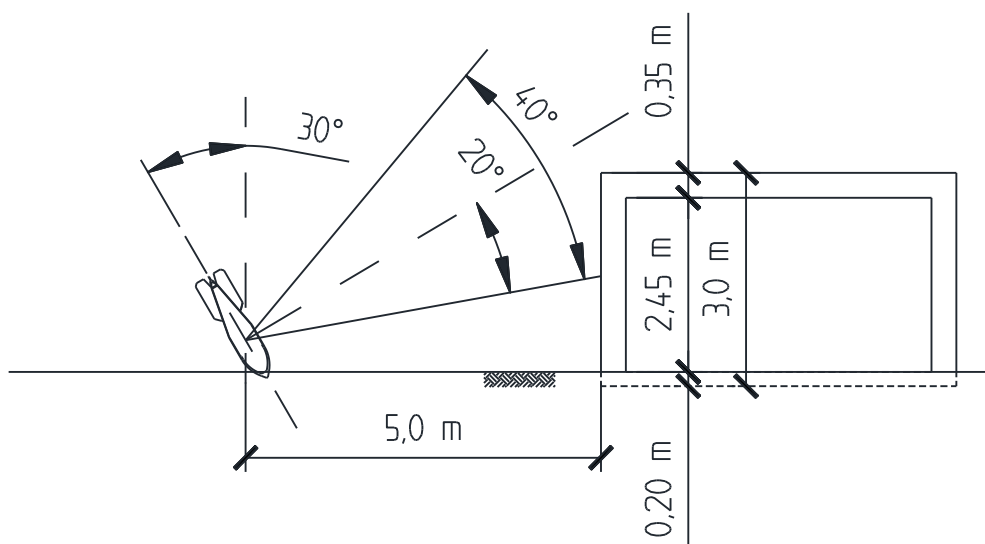
$$I_s = m_s v_s = 0,050 \cdot 1950 = 98 \text{ Pasm}^2 = 98 \text{ Ns} \quad (6:53a)$$

En splittersvärm ger en betydligt högre impuls än enstaka splitter och därför har inte belastning från enstaka splitter studerats vidare i detta exempel. Hur splittersvärmen ser ut varierar mycket beroende på anslagsvinkel och placering av bomben. I figur 6:53a-e visas fem olika möjliga placeringar av bomben vid detonation.

Splitterverkan

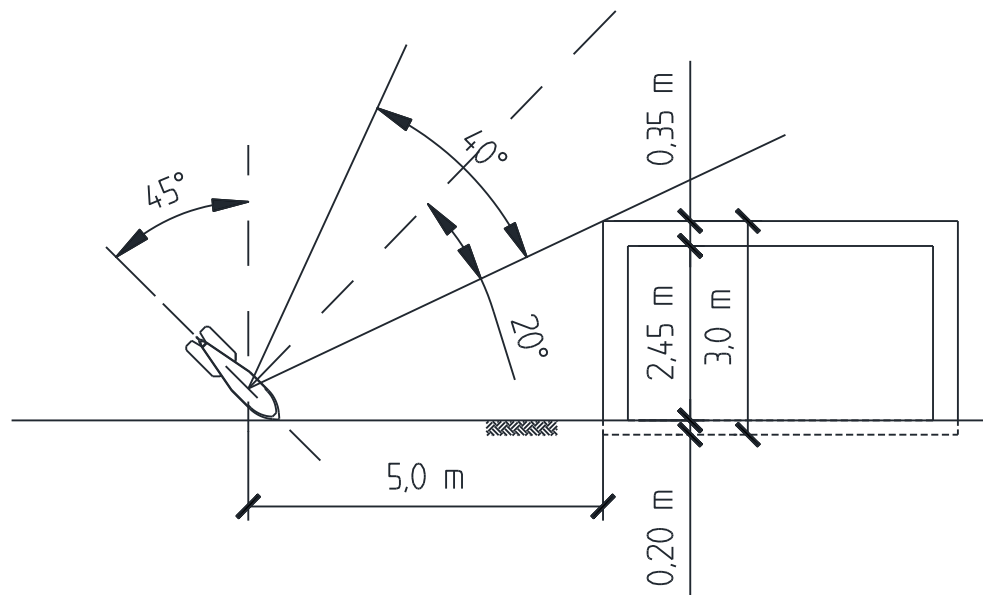


Figur 6:53a. Bombnedslag alternativ (A).

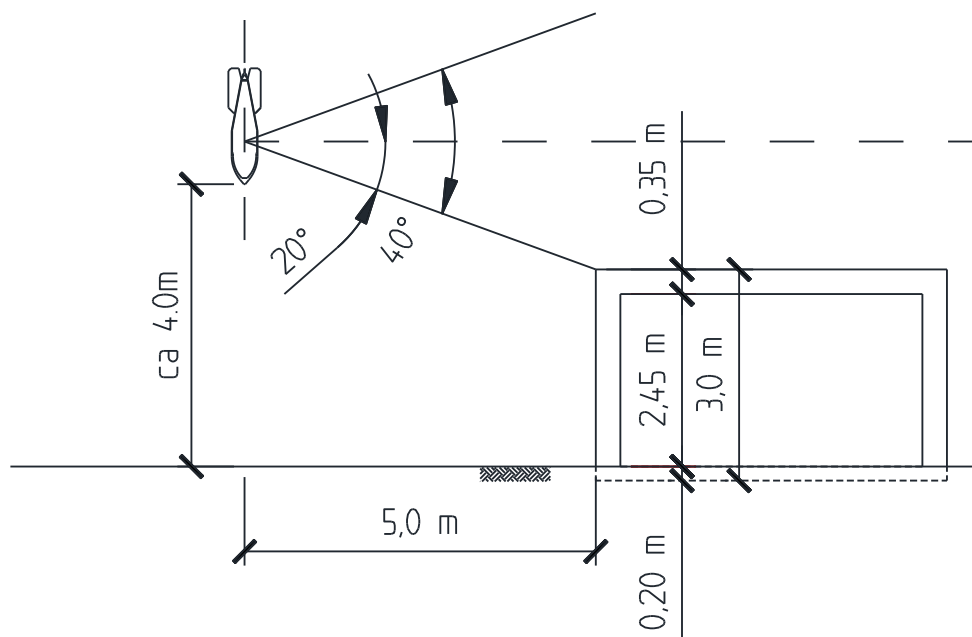


Figur 6:53b. Bombnedslag alternativ (B).

Splitterverkan

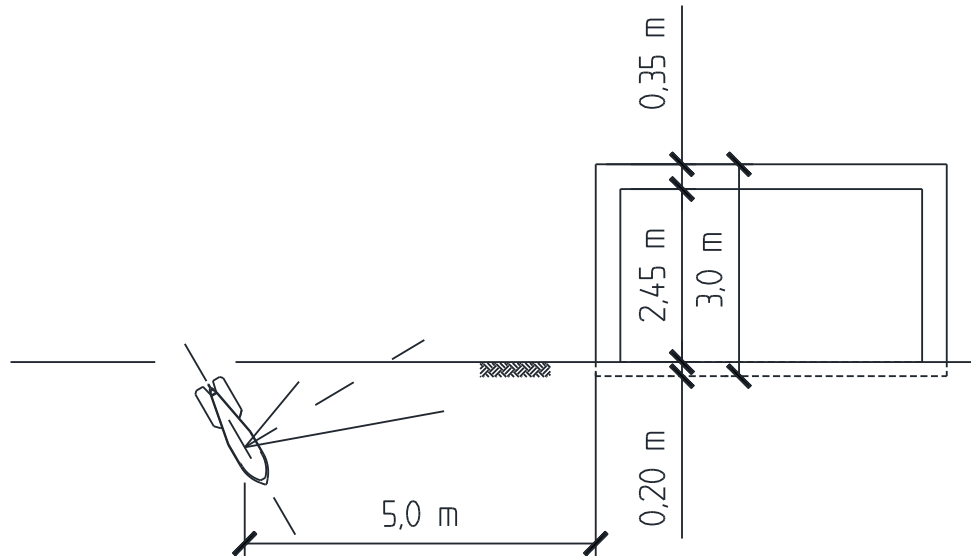


Figur 6:53c. Bombnedslag alternativ (C).



Figur 6:53d. Bombnedslag alternativ (D). Detonation av bomben sker ca 4,0 m upp i luften.

Splitterverkan



Figur 6:53e. Bombnedslag alternativ (E). Detonation av bomb sker i marken.

Alternativ (A) ger högst splittertäthet mot den främre väggen. I avsnitt 3:41 redovisas att 60 % av splittren från en bomb träffar inom ett segment av 40°. Detta ger en splittertäthet på:

$$m_s = 0,66 \text{ kg/m}^2 \quad (6:53b)$$

Totala antalet splitter från arkivbomben beräknas enligt ekvation (3:31b) till ca 25 000 st enligt följande:

$$n_s = \frac{M_h}{2 \cdot M_A} = \frac{115}{2 \cdot 2,28 \cdot 10^{-3}} \approx 25000 \text{ st} \quad (6:53c)$$

Med antagandet att 60 % av splittren träffas av ett segment av 40°, ger detta antalet splitter/m², se även avsnitt 3:14:

$$n_s = \frac{0,6 \cdot n_t}{S} = \frac{0,6 \cdot 25000}{114} = 132 \text{ st/m}^2 \quad (6:53d)$$

För att beräkna splitterhastigheten kan detta göras genom att uppskatta medelvikten hos splittersvärmen. Detta görs genom att dela splittertätheten med antalet splitter, vilket ger:

$$m_{medel} = \frac{m_s}{n_s} = \frac{0,66}{132} = 5,0 \text{ g} \quad (6:53e)$$

För ett splitter med massan 5,0 g fås utgångshastigheten med ekvation (3:5a) som:

Splitterverkan

$$\begin{aligned}v_0 &= 2400 \cdot (1 - e^{-2W/M_h}) \\ &= 2400 \cdot (1 - e^{-2 \cdot 125/125}) = 2075 \text{ m/s}\end{aligned}\quad (6:53f)$$

För ett splitter med massan 5,0 g fås splitterhastigheten v_s efter att ha färdats sträckan 5,0 m i luften enligt ekvation (3:5b):

$$\begin{aligned}v_s &= v_0 e^{-0,0456r/\sqrt[3]{m_s}} \\ &= 1816 \text{ m/s}\end{aligned}\quad (6:53g)$$

Impulstätheten beräknas som:

$$i_s = m_s v_s = 0,66 \cdot 1816 = 1200 \text{ Pas} \quad (6:53h)$$

För alternativ (C) och (D), se figur 6:53c-d, fås ingen koncentrerad splittersvärm mot byggnaden. För det övriga 40 % av splittren som inte ger en koncentrerad splittersvärm antas en sfärisk utbredning och dessa fördelas utanför de 60 % som träffar ett segment på 40 grader. Ytan för en sfär S på 5,0 m är 314 m^2 , se avsnitt 3:41.

Splittertätheten fås som:

$$\rho_s = \frac{M_h}{S_{\text{sfär}} - S_{\text{cylinder}}} = \frac{0,4 \cdot 125}{314 - 114} = 0,25 \text{ kg/m}^2 \quad (6:53i)$$

Dessa splitter antas ha ungefär samma hastighet som den koncentrerade splittersvärmen. Impulstätheten beräknas därmed till:

$$i_s = m_s v_s = 0,25 \cdot 1816 = 454 \text{ Pas} \quad (6:53j)$$

Alternativ (B) i figur 6:53b ger att endast en del av väggen får en koncentrerad splittersvärm. Medan alternativ (E) i figur 6:53e ger i princip ingen splitterbelastning på studerad vägg eftersom bomben detonerar i marken. Dessa studeras inte vidare i detta exempel.

I tabell 6:53 visas impulstätheten för stötvågen från arkivbomben, från koncentrerad splitteranslag, samt sfärisk utbredning på splitter. Stötvågen avser en ren laddning med TNT utan hölje.

Tabell 6:53a. Impulstätheten från arkivbomb, indelad i stötvåg och splitter.

Arkivbomb	Impulstäthet	Andel av luftstötvåg
Stötvåg	2 795 Pas	1
Koncenterad splittersvärm	1 200 Pas	0,43
Icke koncentrerad splittersvärm	454 Pas	0,16

Splitterverkan

För splitterbelastning beräknas lastens varaktighet genom att dela beräknat inträngningsdjup med splittrets medelhastighet under inträngningsförloppet.

Inträngningsdjupet x beräknas enligt ekvation (5:2a) och (5:2b):

$$x = \frac{26,9m_s^{0,37}v_s^{0,9}}{f_c^{0,25}} \quad \text{för } x \leq 117m_s^{1/3} \quad (6:53k)$$
$$= \frac{26,9 \cdot 0,005^{0,37} 1816^{0,9}}{(30 \cdot 10^6)^{0,25}} = 44 \text{ mm}$$

och

$$x = \frac{4,35m_s^{0,4}v_s^{1,8}}{f_c^{0,5}} + 40,6m_s^{1/3} \quad \text{för } x > 117m_s^{1/3} \quad (6:53l)$$
$$= \frac{4,35 \cdot 0,005^{0,4} 1816^{1,8}}{(30 \cdot 10^6)^{0,5}} + 40,6 \cdot 0,005^{1/3} = 77 \text{ mm}$$

Ekvation (6:53l) gäller ty $x > 117 \cdot 0,005^{1/3} = 20 \text{ mm}$.

Inträngningsdjupet x blir ca 80 mm för ett 5 grams splitter när anslagshastigheten är omkring 1 800 m/s. Detta med antagandet att anslagshastigheten minskar linjärt ned till noll resulterar i en medelhastighet för splittren på 900 m/s under inträngningsförloppet. Impulsens varaktighet fås därmed som:

$$t = \frac{x}{v_{medel}} \approx \frac{0,080}{900} = 0,1 \text{ ms} \quad (6:53m)$$

För en koncentrerad splittersvärm fås en lasteffekt enligt figur 6:53f och för en icke koncentrerad splittersvärm fås lasteffekt enligt figur 6:53g.

Ytlasten från splitter beräknas utifrån impulsen. Impulsen är arean under last-tidskurvan. För en triangulär last kan ytlasten, när impulsen är känd, beräknas som:

$$q(t) = \frac{2 \cdot i}{t} \quad (6:53n)$$

Beaktande en 1,0 m bred strimla fås för den koncentrerade splitterbelastningen maximal last som:

$$q(t) = \frac{2 \cdot i}{t} = \frac{2 \cdot 1200}{0,1} = 24000 \text{ kN/m} \quad (6:53o)$$

och för den icke koncentrerade splitterbelastningen fås maximal last som:

Splitterverkan

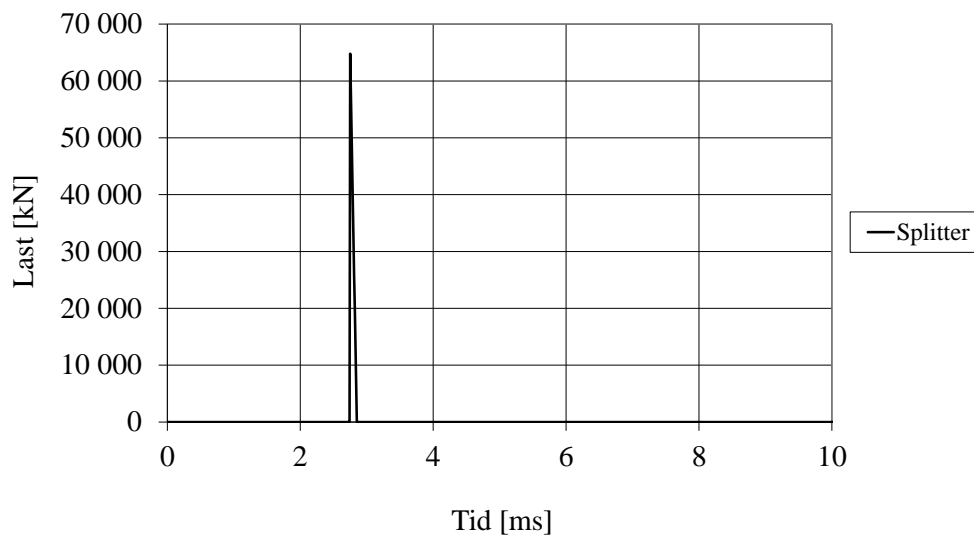
$$q(t) = \frac{2 \cdot i}{t} = \frac{2 \cdot 454}{0,1} = 9080 \text{ kN/m} \quad (6:53p)$$

Lasten för hela balken räknas som den ytlast som erhålls från impulsen multiplicerat med den belastade ytan enligt följande:

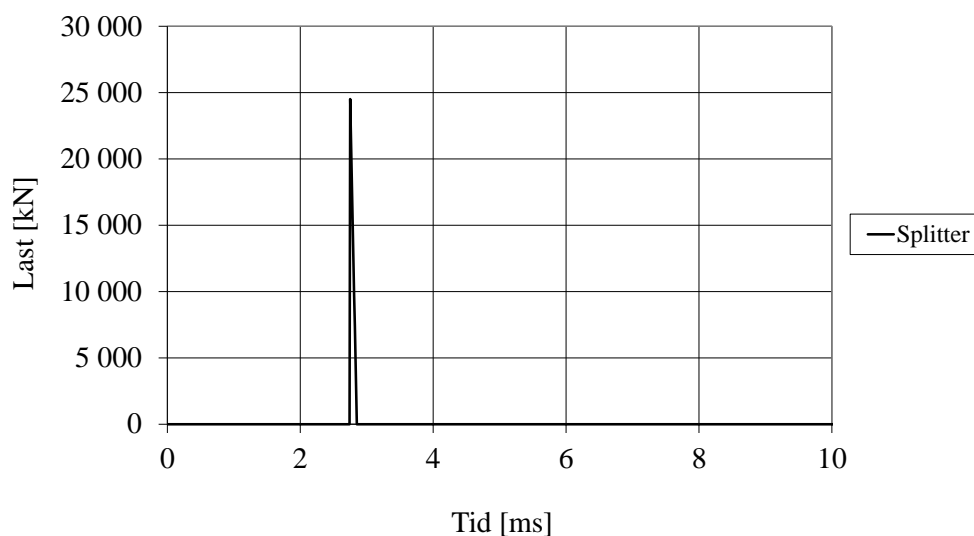
$$F(t) = q(t) \cdot A = q(t) \cdot L \cdot b = q(t) \cdot L, \text{ då } b = 1,0 \text{ m.} \quad (6:53q)$$

Ankomsttiden för splitter kan uppskattas som sträckan genom medelhastigheten hos splitter som:

$$t_a = \frac{s}{v_s} = \frac{5,0}{1800} \approx 2,75 \text{ ms} \quad (6:53r)$$



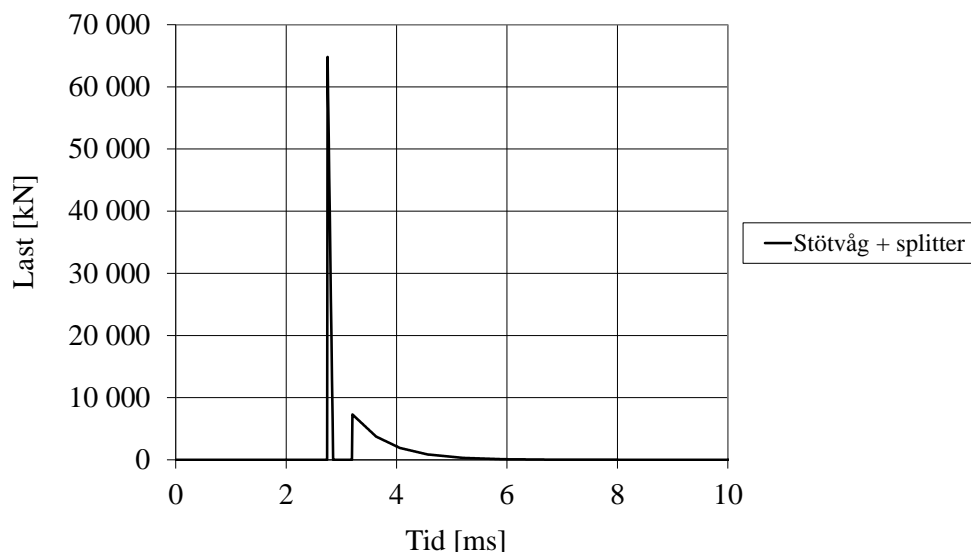
Figur 6:53f. Impulslast från koncentrerat splittersvärn, $i = 1\,200$ Pas.



Figur 6:53g. Impulslast från icke koncentrerad splitteranslag, $i = 454$ Pas.

6:54 Konstruktionens respons på impulslast

Vid beräkning av den kombinerade effekten superponeras impulsen från stötvågen med impulsen från den koncentrerade splittersvärmen och lasteffekt enligt figur 6:54a erhålls. Trycket från splitter är betydligt högre medan varaktigheten endast är en bråkdel av stötvågens varaktighet. Dessutom kommer splittren att träffa balken först och impulsen från splitter har reducerats till noll innan stötvågsfronten når balken.



Figur 6:54a. Impulsbelastning från kombinerad koncentrerad splittersvärm och stötvåg. Belastning från en arkivbomb.

För att beräkna deformationen över tiden löses följande rörelseekvation:

$$\kappa_{MP} M \ddot{u}_s + K u_s = F_{tot}(t) \quad (6:54a)$$

$${}^{t+\Delta t}u = \left(\frac{1}{\Delta t^2} \right)^{-1} \left(F(t) - \left[K(u) - \frac{2\kappa_{MP}M}{\Delta t^2} \right]_t u - \left[\frac{\kappa_{MP}M}{\Delta t^2} \right]^{t-\Delta t} u \right) \quad (6:54b)$$

I figur 6:54b visas lösningen. Lösningen tas fram med central differensmetod, se även avsnitt 6:511. Geometri och materialdata enligt tabell 6:51a. Stötvågsbelastningen enligt 6:51a, den koncentrerade splittersbelastningen enligt figur 6:53f och för den icke koncentrerade splittersbelastningen enligt figur 6:53g. Figur 6:54a visar den kombinerade belastningen från stötvåg och koncentrerad splittersbelastning.

Det kritiska tidssteget beräknas som:

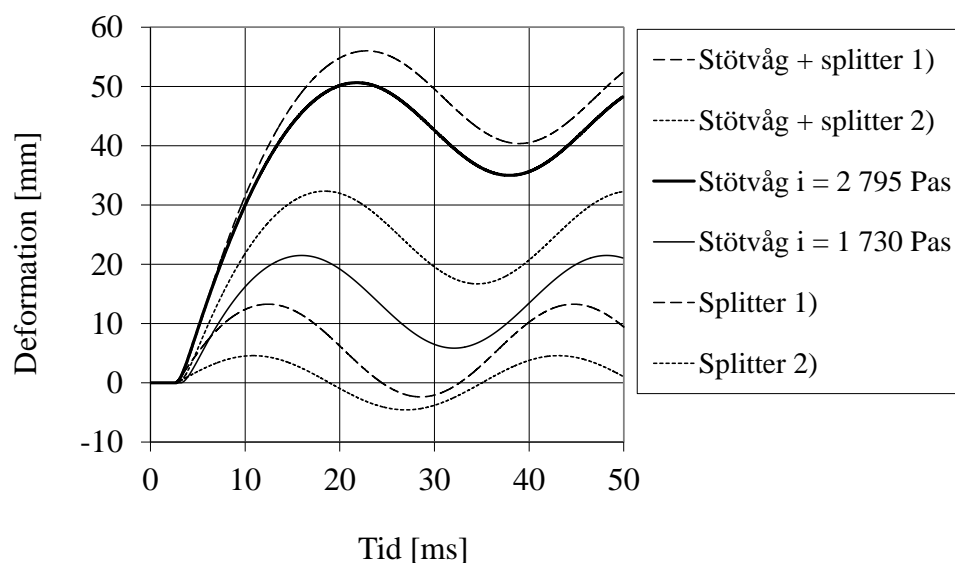
$$\Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{\max}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{K_e}{M_e}}} = 3,8 \text{ ms} \quad (6:54c)$$

Splitterverkan

I analyserna har dock ett mycket lägre tidssteg valts med hänsyn till att erhålla flera värden på belastningen för splitter där varaktigheten endast är 0,1 ms. Det valda tidssteget är $\Delta t = 0,01$ ms, vilket ger 10 värden för splitterbelastningens varaktighet.

Resultat från splittersvärm, dels koncentrerad och dels den glesare svärmen, stötvågsbelastning och kombinationen av dessa redovisas i figur 6:54b. Vidare, som jämförelse visas stötvågsbelastningen från en ren TNT laddning utan hölje med 125 kg TNT.

Jämförelsen mellan de olika belastningsfallen visar att det inte går att superponera deformationen från en analys med stötvågsbelastning med deformationen från en analys med splitterbelastning, vilket illustreras ytterligare i tabell 6:54a. Exempelvis i fallet med stötvåg och koncentrerad splitterbelastning är deformationerna 21 mm respektive 13 mm, medan den kombinerade analysen med stötvågs- och splitterbelastningen ger en deformation på 56 mm. Vidare visar jämförelsen med en ren TNT laddning och den kombinerade stötvågs- och splitterbelastningen att deformationen blir något högre för kombinerad belastning med koncentrerad splitterbelastning.



Figur 6:54b. Deformations-tids samband för kombinerad splitterbelastning för en arkivbomb. 1) Koncentrerad splittersvärm ($i = 1\,200$ Pas), 2) splittersvärm ($i = 454$ Pas).

Splitterverkan

Tabell 6:54a. Jämförelse mellan olika belastningar.

Belastningstyp	Maximal deformation [mm]	Plastisk deformation [mm]	andel impulsintensitet av stötvågen	andel maximal deformation av stötvågen
Splittersvärm $i = 454$ Pas	5	-*	0,16	0,10
Splittersvärm $i = 1\ 200$ Pas	13	5*	0,43	0,25
Stötvåg $i = 2\ 795$ Pas	51	43	1	1
Stötvåg $i = 1\ 730$ Pas	21	14	0,62	0,41
Stötvåg + splitter ($i = 454$ Pas)	32	25*	0,77	0,63
Stötvåg + splitter ($i = 1\ 200$ Pas)	56	48*	1,05	1,10

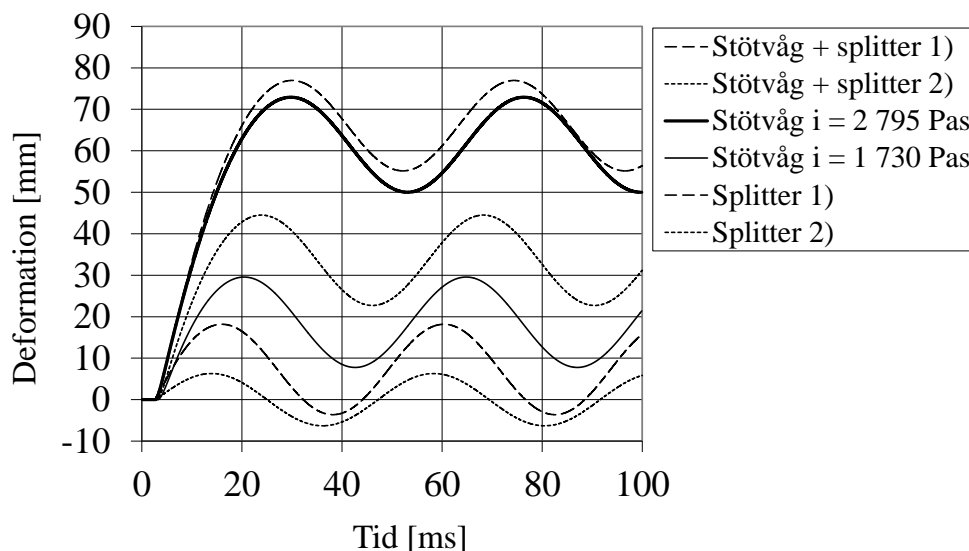
*) Avser global respons hos balk. Kraterbildning i betongen orsakad av splitterbelastning är ej beaktad i denna analys.

En viktig faktor som ej ännu beaktats i analyserna är att när en betongvägg blir utsatt för splitterbelastning tränger splittret in i betongväggen och kraterbildning skapas på ytan. Detta medför att den effektiva tjockleken hos väggen reduceras. Ifall splittermassan och hastigheten är tillräckligt stor kan utstötning fås på baksidan av väggen där splittret har träffat, vilket reducerar konstruktionstjockleken ytterligare. Stötvågs- och splitterbelastning som träffar väggen med den reducerade tjockleken orsakar nu värre skada för konstruktionen jämfört med analyserna redovisade i figur 6:54b samt tabell 6:54a.

Ifall splitter träffar så tätt att kratrar sammanfaller med varandra förstörs hela ytan. Ett sätt att beakta detta är att genomföra motsvarande analyser som är redovisade i tabell 6:54a med en reducerad höjd på balken. Resultat av dessa analyser redovisas i figur 6:54c. I detta fall har balkens höjd reducerats från 350 mm till 270 mm. Den reducerade balkens höjd är baserat på minskat penetrationsdjup av ett medelsplitter, vilket ger en reduktion på 80 mm.

Analyserna visar att kvoten mellan de olika belastningsfallen i förhållande till en ren laddning med TNT är likvärdiga, jämför tabell 6:54a och tabell 6:54b. Dock ökar deformationerna då kraterbildning beaktas i SDOF-modellen jämfört med en oskadad balk. Deformationen ökar med en faktor på ca 1,5 från en last med koncentrerad splittersvärm jämfört med last från en ren stötvåg utan hölje och med balkens höjd på 350 mm.

Splitterverkan



Figur 6:54c. Deformations-tids samband för kombinerad splitterbelastning för en arkivbomb. 1) Koncentrerad splittersvärm ($i = 1\,200$ Pas), 2) splittersvärm ($i = 454$ Pas). Balkens höjd reducerad till 270mm.

Tabell 6:54b. Jämförelse mellan olika belastningar. Kraterbildning beaktad i analyserna. Det vill säga balkens höjd är reducerad från 350 mm till 270 mm.

Belastningstyp	Maximal deformation [mm]	Plastisk deformation [mm]	andel impuls-intensitet av stötvågen	andel maximal deformation av stötvågen
Splittersvärm $i = 454$ Pas	6	-*	0,16	0,08
Splittersvärm $i = 1\,200$ Pas	18	7*	0,43	0,25
Stötvåg $i = 2\,795$ Pas	73	62*	1	1
Stötvåg $i = 1\,730$ Pas	30	19*	0,62	0,41
Stötvåg + splitter ($i = 454$ Pas)	45	34*	0,77	0,62
Stötvåg + splitter ($i = 1\,200$ Pas)	77	66*	1,05	1,05

*) Avser global respons hos balk. Vid splitteranslag sker krossning i betong.

7 Slutsatser

Denna rapport behandlar främst splitterverkan. Rapporten behandlar även grundläggande fysikaliska samband för dynamik, stötar och stötvågsutbredning i material. I denna rapport har MSB:s arkivbomb tagits fram, vilket avser framtagning av splitterdata. Dess lasteffekt, det vill säga den stötvåg och splitter som orsakas från arkivbomben motsvarar en 250 minbomb med 50 viktprocent trotyl (TNT).

Ett viktigt mål har varit att kunna beskriva komplexa fysikaliska fenomen på ett sådant sätt att en verksam ingenjör kan följa härledningarna. I rapporten har härledningar tagits fram i den mån det har varit möjligt för analytiska och empiriska samband redovisade i litteraturen. Genom att följa dessa härledningar och analysera sambanden har en ökad förståelse och kunskap tagits fram i denna rapport gällande området splitterverkan på främst armerade betongkonstruktioner.

Ett avsnitt i rapporten behandlar materialegenskaper. Detta är en sammanställning av befintlig kunskap inom ämnesområdet snabba förlopp, såsom explosions- eller splitterbelastning. Responsen hos betongkonstruktioner skiljer sig vid snabba belastningar jämfört med statisk belastning. Egenskaper som betongens töjningshastighet och tillståndsekvation blir viktiga för att kunna bestämma responsen hos konstruktionen.

En skada hos en konstruktion kan indelas i dess globala och lokala respons. I rapporten redovisas en beräkningsmodell för den globala responsen för betongkonstruktioner utsatta för stötvågs- och splitterbelastning, där en konstruktions elastiska och plastiska utböjning kan beräknas. I rapporten redovisas empiriska samband för lokala skador i betongen såsom penetration, perforation och utstötning.

Genom detta arbete har kunskap inom splitterverkan samlats ihop och analyserats och på så sätt bevaras kunskapen som en plattform för ett fortsatt nyttjande i MSB:s kunskapsbas för extrema belastningar i betongkonstruktioner.

8 Referenser

Andersson A., Axelsson H. och Holmström S. (1989): Splitter från flygbomber. Sprängningar med 250 kg mb m/50 och 500 kg mb m/56. Försvarets Forskningsanstalt, FOA Rapport, C 20744-2.3, Stockholm.

Bažant Z. P., Xiang Y. Y., Adley M. D., Prat P. C. och Akers S. A. (1996): Microplane Model for Concrete: II: Data Delocalization and Verification. *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 122, nr. 3, mars, sid. 255-262.

Bischoff P. H. och Perry S. H. (1991): Compressive behaviour of concrete at high strain rates. *Materials and Structures*, Vol. 24, sid. 425-450.

Bulson P. S. (1997): Explosive loading of engineering structures. E & FN SPON, London, Storbritannien.

ConWep (1992): ConWep – Collection of conventional weapons effects calculations based on TM 5-855-1. *Fundamentals of Protective Design for Conventional Weapons*, U.S. Army Engineer Waterways Experiment Station, Vicksburg, VA, USA.

Edvinsson H., Pettersson M-J., Holmgren E., Sandberg B., Östmark H., Helte A., Lundgren J., Johansson M. och Irwing J. (2005): Utveckling av ADN/AI. Totalförsvarets forskningsinstitut, FOI Rapport, FOI-R--1704—SE, Tumba, Sverige.

Engberg T. och Karevik S. (1987): Fortifikationshandbok del 1, FortH 1. Försvarets läromedelscentral (FLC), Stockholm.

Fortifikationsförvaltningen (1973a): Provisoriska anvisningar för dimensionering av armerade betongkonstruktioner som skydd mot verkan av konventionella vapen inom närmissområde. Fortifikationsförvaltningen, Befästningsavdelningen, Publ nr 25:1 Bk/1973, Stockholm.

Fortifikationsförvaltningen (1973b): Provisoriska anvisningar för dimensionering av armerade betongkonstruktioner som skydd mot verkan av konventionella vapen inom närmissområde. Kommentarer. Fortifikationsförvaltningen, Befästningsavdelningen, Publ nr 25:2 Bk/1973, Stockholm.

Goldsmith W. (1960): *Impact: the theory and physical behaviour of colliding solids*. London, Storbritannien.

Herrmann N., Eibl J. och Stempniewski (2002): Experiments on concrete under shock loading. Konferens: Structures under Shock and Impact VII, SUSI VII, Montreal, Kanada, sid. 389-398.

Janzon B. (1978): Grundläggande Stridsdelfysik, FOA Rapport C 20261-D4, Försvarets Forskningsanstalt, Stockholm, Sverige, 164 s.

Johansson M. (2002): Stötvågsutbredning i luft. Räddningsverket, Publikation B54-223/02, www.msb.se/skyddsrum, Karlstad.

Johansson M. och Laine L. (2007): Bebyggelsens motståndsförmåga mot extrem dynamisk belastning. Delrapport 1: Last av luftstötvåg. Räddningsverket, Rapport B54-232/07, www.msb.se/skyddsrum, Karlstad.

Johansson M. och Laine L. (2008): Bebyggelsens motståndsförmåga mot extrem dynamisk belastning. Delrapport 2: Explosion i gatukorsning. Räddningsverket, Rapport B54-240/08, www.msb.se/skyddsrum, Karlstad.

Johansson M. och Laine L. (2009): Bebyggelsens motståndsförmåga mot extrem dynamisk belastning. Delrapport 3: Kapacitet hos byggnader. Myndigheten för samhällsskydd och beredskap, MSB, MSB 0142-10, www.msb.se/skyddsrum, Karlstad.

Krauthammer T. (2000): Modern Protective Structures, Design, analysis and evaluation, Course notes, The Pennsylvania State University, 2 böcker.

Laine L. (2012): Markstötvåg. Myndigheten för samhällsskydd och beredskap, MSB, Publ.nr: MSB344, ISBN: 978-91-7383-187-1, www.msb.se/skyddsrum, Karlstad.

Leppänen J. (2004): Concrete Structures Subjected to Fragment Impacts, Dynamic Behaviour and Material Modelling. Institutionen för konstruktion och mekanik, Betongbyggnad, Chalmers Tekniska Högskola, Doktorsavhandling, Publikation 04:4, Göteborg.

Malvar L. J. och Ross C. A. (1998): Review of Strain Rate Effects for Concrete in Tension. ACI Materials Journal, Vol. 95, Nr. 6, November-December, sid. 735-739.

Meyers M. A. (1994): Dynamic Behavior of Materials. John Wiley & Sons.

MSB (2009): Skyddsrum, SR 09. Myndigheten för samhällsskydd och beredskap (MSB), författad av Ekengren B., Beställningsnummer B54-141/09, Karlstad.

Nyström U. (2006): Design with regard to explosions. Avdelningen för Konstruktionsteknik, Betongbyggnad, Chalmers Tekniska Högskola, Examensarbete 06:14.

Rodríguez-Martínez J. A., Rusinek A., Chevrier P., Bernier R. och Arias A. (2010): Temperature measurements on ES steel sheets subjected to perforation by hemispherical projectiles. International Journal of Impact Engineering, Vol. 37, Nr. 7, sid. 828-841.

Splitterverkan

U.S. Department of Energy (1980): Manual for the Prediction of Blast and Fragment Loadings on Structures. U.S. Department of Energy, Albuquerque operations office, Amarillo area office, Facsmile Print of U.S. Report DOE/TIC-11268, Amarillo, Texas, USA.

Zielinski A. J. (1982): Fracture of concrete and mortar under uniaxial impact tensile loading. Doktorsavhandling, Delfts Tekniska Universitet, Delft, Nederländerna.

Zukas, J. A. (1990): High Velocity Impact Dynamics. Wiley Interscience, 1990.

Bilaga A Dynamik - detaljer

A:1 Klassisk stelkroppsdyamik

A:11 Härlledning av hastigheter för elastisk stöt

Nedan görs en härlledning av ekvationerna (2:22a-b). Enligt förutsättningar i avsnitt 2:22 har kropp A massan m_A och hastigheten v_{Af} före och v_{Ae} efter stöten. Motsvarande har kropp B massan m_B och hastigheten v_{Bf} före och v_{Be} efter stöten.

Lagen om konservering av rörelsemängden ger:

$$m_A v_{Af} + m_B v_{Bf} = m_A v_{Ae} + m_B v_{Be} \quad (\text{A:11a})$$

Konservering av kinetisk energi ger:

$$m_A \frac{v_{Af}^2}{2} + m_B \frac{v_{Bf}^2}{2} = m_A \frac{v_{Ae}^2}{2} + m_B \frac{v_{Be}^2}{2} \quad (\text{A:11b})$$

Ekvationerna (A:11a) och (A:11b) har sex obekanta. För att hitta en lösning behövs fyra av dessa kännas till för en entydig lösning, exempelvis kan hastigheter efter stöt räknas ut ifall hastigheterna före stöten och massorna för kropp A och B är kända.

Detta kan göras genom att skriva om ekvation (A:11a):

$$m_A (v_{Ae} - v_{Af}) = m_B (v_{Bf} - v_{Be}) \quad (\text{A:11c})$$

Ekvation (A:11b) kan skrivas om till:

$$m_A (v_{Ae}^2 - v_{Af}^2) = m_B (v_{Bf}^2 - v_{Be}^2) \quad (\text{A:11d})$$

Tillämpa konjugatregeln:

$$m_A (v_{Ae} + v_{Af})(v_{Ae} - v_{Af}) = m_B (v_{Bf} + v_{Be})(v_{Bf} - v_{Be}) \quad (\text{A:11e})$$

Kombinera ekvation (A:11c) med (A:11e) och förenkla

$$v_{Be} - v_{Ae} = -(v_{Bf} - v_{Af}) \quad (\text{A:11f})$$

Splitterverkan

Ekvation (A:11f) visar att den relativa hastigheten hos de två kropparna byter tecken efter stöten, där den relativa hastigheten är differensen av kropparnas hastighet. Nu kan hastigheten hos dessa kroppar beräknas genom att ställa upp ett ekvationssystem med ekvation (A:11a) och (A:11f) där hastigheterna efter stöten är obekanta, ifall massorna och hastighet före stöt är kända. Omvänt går det att räkna ut hastigheten före stöten för båda kropparna ifall hastigheten efter stöten var känd för dessa kroppar. Här visas hur hastigheter efter stöten beräknas:

dividera ekvation (A:11a) med m_B , då fås:

$$\frac{m_A}{m_B} v_{Af} + v_{Bf} = \frac{m_A}{m_B} v_{Ae} + v_{Be} \quad (\text{A:11g})$$

lös ut v_{Be} ur ekvation (A:11f) och insättning i ekvation (A:11g) ger:

$$v_{Ae} \left(1 + \frac{m_A}{m_B}\right) = v_{Af} \left(\frac{m_A}{m_B} - 1\right) + 2v_{Bf} \quad (\text{A:11h})$$

multiplitera båda leden med m_B och division med $m_A + m_B$ ger:

$$v_{Ae} = \frac{v_{Af}(m_A - m_B) + 2v_{Bf}m_B}{m_A + m_B} \quad (\text{A:11i})$$

på motsvarande sätt härleds uttryck för hastigheten för kropp B efter stöt:

$$v_{Be} = \frac{2v_{Af}m_A + v_{Bf}(m_B - m_A)}{m_A + m_B} \quad (\text{A:11j})$$

A:12 Härlledning av hastigheter för plastisk stöt

Nedan görs en härledning av ekvationerna (2:23c-d). Enligt förutsättningar i avsnitt 2:23 har kropp A massan m_A och hastigheten v_{Af} före stöten, motsvarande har kropp B massan m_B och hastigheten v_{Bf} före stöten. Eftersom kropparna sitter ihop efter stöten har båda kropparna samma hastighet v_e .

Lagen om konservering av rörelsemängden ger:

$$m_A v_{Af} + m_B v_{Bf} = m_A v_e + m_B v_e \quad (\text{A:12a})$$

lös ut hastigheten efter stöt:

$$v_e = \frac{m_A v_{Af} + m_B v_{Bf}}{m_A + m_B} \quad (\text{A:12b})$$

Splitterverkan

För en stöt som är inte är fullständigt plastisk introduceras studs-koefficienten e vilket är en materialkonstant enligt följande:

$$e_e = \frac{v_{Be} - v_{Ae}}{v_{Af} - v_{Bf}} \quad (\text{A:12c})$$

vilket beskriver den relativa hastigheten före och efter stöt mellan kropparna. Studskoefficienten kan variera mellan 0 och 1. Extremvärdena 0 och 1 ger:

$$\begin{aligned} e = 1 & \text{ fullständigt elastisk stöt} \\ e = 0 & \text{ fullständigt plastisk stöt} \end{aligned}$$

Lagen om rörelsemängdens bevarande ger:

$$m_A v_{Af} + m_B v_{Bf} = m_A v_{Ae} + m_B v_{Be} \quad (\text{A:12d})$$

Dividera ekvation (A:12d) med m_A , då fås:

$$v_{Af} + \frac{m_B}{m_A} v_{Bf} = v_{Ae} + \frac{m_B}{m_A} v_{Be} \quad (\text{A:12e})$$

lös ut hastighet före stöt för kropp A ur ekvation (A:12c) och insättning ger:

$$\left(1 + \frac{m_B}{m_A}\right)v_{Be} = (1 + e)v_{Af} + \left(\frac{m_B}{m_A} - e\right)v_{Bf} \quad (\text{A:12f})$$

förenkla och då fås hastighet efter stöt för kropp B:

$$v_{Be} = \frac{m_A e (v_{Af} - v_{Bf}) + m_A v_{Af} + m_B v_{Bf}}{m_A + m_B} \quad (\text{A:12g})$$

På motsvarande sätt lös ut hastigheten före stöt för kropp B ur ekvation (A:12c) och insättning i ekvation (A:12d), samt förenkla, då fås hastigheten efter stöt för kropp A:

$$v_{Ae} = \frac{m_B e (v_{Bf} - v_{Af}) + m_A v_{Af} + m_B v_{Bf}}{m_A + m_B} \quad (\text{A:12h})$$

A:2 Härlledning av konserveringslagarna

Nedan följer en härledning av stötvågsparametrar som redovisas i avsnitt 2:5. Studera en stötvågsfront i figur A:2a som rör sig från vänster till höger genom ett tvärsnitt med arean A . Genom att tänka sig att stötvågs-

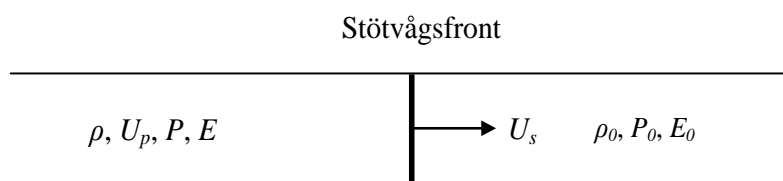
Splitterverkan

fronten står stilla och istället låta mediet passera stötvågsfronten kan tre grundläggande samband härledas, betraktelsesättet är enligt Euler. De tre grundläggande sambanden i stötvågsberäkningar är konservering av massa, konservering av rörelsemängd och konservering av energi. Dessa samband går bra att härleda enligt Lagrange betraktelsesätt, det vill säga att stötvågsfronten rör sig rent fysikaliskt, se Johansson (2002).

Stötvågsfronten har hastigheten U_s (motsvarande våghastigheten c för en elastisk våg). I ett betraktelsesätt enligt Euler passerar därmed det ostörda mediet – vilket benäms med index 0 – med hastigheten U_s stötvågsfronten från höger till vänster, eftersom stötvågsfronten rör sig mot höger i verkligheten. När det ostörda mediet (med verklig hastighet noll) har passerat stötvågsfronten blir partikelhastigheten lika med U_p efter att mediet har blivit stört av stötvågsfronten. Partikelhastigheten är alltid långsammare än stötvågsfrontens hastighet för en stötvåg.

Trycket ökar från P_0 till P , densiteten ökar från ρ_0 till ρ , och energiintensiteten ökar från E_0 till E när det ostörda mediet passerar stötvågsfronten.

Med partikelhastighet menas att partiklarna i materialet får en hastighet och ifall de förhindras att röra på sig komprimeras materialet och tryck, densitet och energiintensitet ökar.



Figur A:2a. Ett ostört medium passerar en stötvågsfront. Betraktelse sätt enligt Euler.

Konservering av massa innebär att passerad massa över en tidsperiod Δt genom stötvågsfronten skall vara konstant. Konservering av massa för mediet som passerar stötvågsfronten kan därmed uttryckas som:

$$m_{före} = m_{efter} \quad (\text{A:2a})$$

Massan beräknas som densitet multiplicerat med volym och kan då skrivas som:

$$\rho_0 V_0 = \rho V \quad (\text{A:2b})$$

Volymen V kan uttryckas som produkten mellan en sträcka och tvärsnittsarea A . Denna sträcka beräknas som en hastighet U_s multiplicerat med en tidsperiod Δt . Observera att hastigheten för det störda mediet som passerar stötvågsfronten blir stötvågshastigheten minus partikelhastigheten. Ekvation (A:2b) kan då skrivas om som:

Splitterverkan

$$\rho_0 U_s A \Delta t = \rho (U_s - U_p) A \Delta t \quad (\text{A:2c})$$

$$\text{där } V_0 = U_s \Delta t A, \quad V = (U_s - U_p) \Delta t A \quad (\text{A:2d})$$

Förkorta bort arean och tiden i ekvation (A:2c), då fås ett generellt uttryck som nyttjas i stötvågsberäkningar, där konservering av massa uttrycks som funktion av densitet, stötvågshastighet och partikelhastighet.

$$\rho_0 U_s = \rho (U_s - U_p) \quad (\text{A:2e})$$

Konservering av rörelsemängd innebär att ändring av massa och hastighet över tiden är konstant. Nyttja att massan är densamma före och efter att stötvågsfronten har passerat, se ekvation (A:2c). Ändring i partikelhastigheten är U_p eftersom partikelhastigheten var noll före mediet passerade stötvågsfronten (i verkligheten passerar stötvågsfronten mediet), då fås:

$$I = A \int_0^t p(t) dt = m \int_0^v dv \quad (\text{A:2f})$$

$$A(P - P_0) \Delta t = \rho_0 U_s A \Delta t U_p \quad (\text{A:2g})$$

förkorta bort arean och tiden då fås uttrycket för konservering av rörelsemängd:

$$(P - P_0) = \rho_0 U_s U_p \quad (\text{A:2h})$$

Konservering av energi säger att det yttre arbetet skall vara lika med ändring i potentiell och kinetisk energi.

Yttre arbetet är kraften P på tvärsnittet A som varar under sträckan $U_p \Delta t$.

Ändring i den potentiella energiintensiteten, E (energi/enhetsmassa) blir när lagen om konservering av massa nyttjas, se ekvationerna (A:2a):

$$E m_{\text{efter}} - E_0 m_{\text{före}} \quad (\text{A:2i})$$

vilket kan skrivas om med ekvation (A:2a-c) som:

$$E \rho (U_s - U_p) A \Delta t - E_0 \rho_0 U_s A \Delta t \quad (\text{A:2j})$$

och detta kan förenklas genom att nyttja ekvation (A:2c) till:

$$(E - E_0) \rho_0 U_s A \Delta t \quad (\text{A:2k})$$

Hastigheten var ursprungligen noll och därmed blir ändring i kinetisk energi

Splitterverkan

$$\frac{1}{2}mv^2 \quad (\text{A:2l})$$

då ekvation (A:2a-c) nyttjas fås:

$$\frac{1}{2}\rho(U_s - U_p)A\Delta t U_p^2 \quad (\text{A:2m})$$

vilket kan skrivas om med ekvation (A:2c) som:

$$\frac{1}{2}\rho_0 U_s A \Delta t U_p^2 \quad (\text{A:2n})$$

Konsivering av energin blir med ekvationerna (A:2h), (A:2k) och (A:2n), där yttre arbete är lika summan av ändring i kinetisk och potentiell energi, arean och tiden elimineras bort vilket ger:

$$PU_p = \frac{1}{2}\rho_0 U_s U_p^2 + (E - E_0)\rho_0 U_s \quad (\text{A:2o})$$

Detta uttryck kan skrivas om med hjälp av ekvation (A:2e) och (A:2h), för en fullständig härledningen, se Johansson (2002):

$$E - E_0 = \frac{1}{2}(P + P_0)\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho}\right) \quad (\text{A:2p})$$

Ekvation (A:2p) är känd som Rankine-Hugoniot ekvationen.

Sammanfattningsvis kan stötvågsparametrarna uttryckas med tre ekvationer, vilka följer:

<p>Konsivering av massa:</p> $\rho_0 U_s = \rho(U_s - U_p) \quad (\text{A:2q})$
<p>Konsivering av rörelsemängd:</p> $(P - P_0) = \rho_0 U_s U_p \quad (\text{A:2r})$
<p>Konsivering av energi:</p> $E - E_0 = \frac{1}{2}(P + P_0)\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho}\right) \quad (\text{A:2s})$

A:3 Härlledning av Rayleighlinje

Rayleighlinje visas i figur 2:5a. Nedan följer en härledning av Rayleighlinjens lutning. Denna lutning kan beräknas genom att lösa ut partikelhastigheten U_p ur 2:5a och insättning i 2:5b enligt följande:

$$(P - P_0) = \rho_0 U_s U_p = \rho_0 U_s \frac{U_s (\rho - \rho_0)}{\rho} \quad (\text{A:3a})$$

skriv om och nyttja specifik volym enligt ekvation (2:5d):

$$\begin{aligned} \frac{P - P_0}{1 - \frac{\rho_0}{\rho}} = \rho_0 U_s^2 &\Leftrightarrow \frac{P - P_0}{\frac{1}{\rho_0} (1 - \frac{\rho_0}{\rho})} = \rho_0^2 U_s^2 \Leftrightarrow \frac{P - P_0}{(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0})} = -\rho_0^2 U_s^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{P - P_0}{(v - v_0)} = -\rho_0^2 U_s^2 \end{aligned} \quad (\text{A:3b})$$

A:4 Tabulerade stötvågsparametrar

Tabell A:4a. Tabulerade stötvågsparametrar, enligt Meyers (1994).

	P	ρ	V/V_0	U_s	U_p	C	S
	GPa	g/cm ³		km/s	km/s	km/s	
Al	0	2,785	1	5,328	0	5,328	1,34
	10	3,081	0,904	6,114	0,587	6,220	
	20	3,306	0,842	6,751	1,064	6,849	
	30	3,490	0,798	7,302	1,475	7,350	
	40	3,647	0,764	7,694	1,843	7,774	
Cu	0	8,930	1	3,940	0	3,940	1,49
	10	9,499	0,940	4,325	0,259	4,425	
	20	9,959	0,897	4,656	0,481	4,808	
	30	10,349	0,863	4,950	0,679	5,131	
	40	10,668	0,835	5,218	0,858	5,415	
Fe	0	7,850	1	3,574	0	3,574	1,92
	10	8,479	0,926	4,155	0,306	4,411	
	20	8,914	0,881	4,610	0,550	4,054	
	30	9,258	0,848	4,993	0,759	5,602	
	40	9,543	0,823	5,329	0,945	6,092	
Ni	0	8,874	1	4,581	0	4,581	1,44
	10	9,308	0,953	4,916	0,229	5,005	
	20	9,679	0,917	5,213	0,432	5,357	
	30	9,998	0,888	5,483	0,617	5,661	
	40	10,285	0,863	5,732	0,786	5,933	
W	0	19,224	1	4,029	0	4,029	1,24
	10	19,813	0,970	4,183	0,124	4,207	
	20	20,355	0,944	4,326	0,240	4,365	
	30	20,849	0,922	4,462	0,350	4,508	
	40	21,331	0,901	4,590	0,453	4,638	

A:5 Härledning av partikelhastighet

Nedan följer en härledning av partikelhastigheten, se ekvation (2:6j). Förutsättningar för härledningen beskrivs i avsnitt 2:6, där stav A träffar en stillastående staven B med hastigheten v_0 .

Partikelhastigheten för stav B blir $U_{pB} = \Delta U_{pB}$ bakom stötvågsfronten och noll framför stötvågsfronten eftersom staven stod still. Med ekvation (2:6d) kan ekvation (2:6h) skrivas om till, nyttja att $U_{pB} = \Delta U_{pB}$

$$\begin{aligned}
 P_A &= \rho_{0A} C_{0A} \Delta U_{pA} + \rho_{0A} S_{1A} \Delta U_{pA}^2 \\
 &= \rho_{0A} C_{0A} (v_0 - \Delta U_{pB}) + \rho_{0A} S_{1A} (v_0 - \Delta U_{pB})^2 \\
 &= \rho_{0A} C_{0A} (v_0 - U_{pB}) + \rho_{0A} S_{1A} (v_0 - U_{pB})^2
 \end{aligned}
 \tag{A:5a}$$

Splitterverkan

kombinera ekvation (2:6a) med (2:6i) och (A:5a) då fås:

$$\rho_{0A}C_{0A}(v_0 - U_{pB}) + \rho_{0A}S_{1A}(v_0 - U_{pB})^2 = \rho_{0B}(C_{0B} + S_{1B}U_{pB})U_{pB} \quad (\text{A:5b})$$

där partikelhastigheten U_{pB} blir den enda obekanta. Förenkla och då fås:

$$U_{pB}^2(\rho_{0B}S_{1B} - \rho_{0A}S_{1A}) + U_{pB}(\rho_{0B}C_{0B} + \rho_{0A}C_{0A} + 2\rho_{0A}S_{1A}v_0) - \rho_{0A}(C_{0A}v_0 + S_{1A}v_0^2) = 0 \quad (\text{A:5c})$$

en andragradsekvation har den allmänna lösningen:

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$
$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (\text{A:5d})$$

ekvation (A:5c) får därmed lösningen:

$$U_{pB} = \frac{-(\rho_{0B}C_{0B} + \rho_{0A}C_{0A} + 2\rho_{0A}S_{1A}v_0) \pm \sqrt{\Delta}}{2(\rho_{0B}S_{1B} - \rho_{0A}S_{1A})} \quad (\text{A:5e})$$

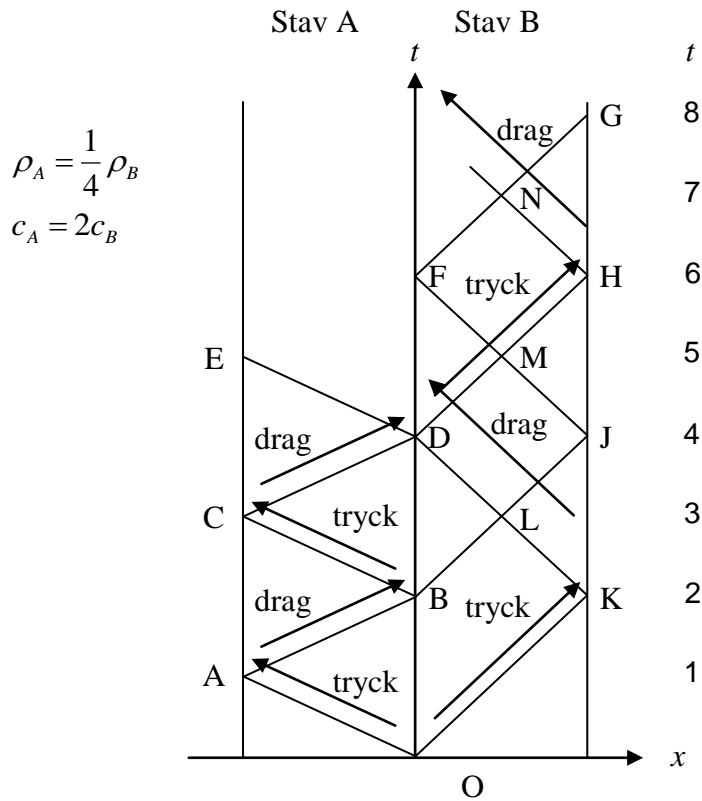
där

$$\Delta = (\rho_{0B}C_{0B} + \rho_{0A}C_{0A} + 2\rho_{0A}S_{1A}v_0)^2 + 4\rho_{0A}(C_{0A}v_0 + S_{1A}v_0^2)(\rho_{0B}S_{1B} - \rho_{0A}S_{1A}) \quad (\text{A:5f})$$

A:6 Elastisk stöt mellan olika material

Följande exempel är tagen från Zukas (1990). Detta exempel illustrerar hur viktigt det är att beakta vågpropagering för stöt mellan olika material. Våghastighet och densitet varierar för olika material. Studera en stav som stöter mot en annan stav med samma längd men med olik våghastighet och densitet. Stav A rör sig från vänster och träffar den stillastående staven B med en hastighet v_0 . Antag att v_0 är tillräckligt långsam så att en elastisk stöt sker. Lagrangediagrammet i figur A:6a visar hur spänningsvågorna varierar i de två stavarna. Låt våghastigheten vara dubbel så stor i stav A som i stav B. Eftersom våghastigheten är dubbel kommer spänningsvågen hinna vandra fram och tillbaka två gånger innan spänningsvågen har vandrat fram och tillbaka en gång i stav B. Låt densiteten för stav B vara fyra gånger högre än för stav A.

Splitterverkan



Figur A:6a. Lagrangiandiagram för stöt mellan två olika material med samma längd. Våghastigheten i stav A är dubbelt så stor som i stav B. Baserad på Zukas (1990).

Den relativa hastigheten mellan stavarna är v_0 , eftersom stav A hade begynnelsehastigheten v_0 och stav B stod still.

$$v_R = \Delta U_{pA} + \Delta U_{pB} = v_0 \quad (\text{A:6a})$$

När stav A träffar den stillastående staven B, genereras en ändring i partikelhastighet ΔU_{pB} i stav B i gränsskiktet $x = 0$. Ändring i partikelhastighet för stav A blir således:

$$\Delta U_{pA} = (v_R - \Delta U_{pB}) = v_0 - \Delta U_{pB} \quad (\text{A:6b})$$

En tryckt spänningstvågel vandrar till vänster. Tryckspänningen blir

$$\sigma_A = \rho_A c_A (v_0 - \Delta U_{pB}) \quad (\text{A:6c})$$

där ρ_A och c_A är densitet respektive våghastighet för stav A och $(v_0 - \Delta U_{pB})$ är partikelhastighet associerad till trycktvågen som vandrar mot vänster.

Den verkliga hastigheten i stav A skiljer sig dock ifrån partikelhastigheten, och är ursprungshastigheten minus partikelhastigheten associerad till den

Splitterverkan

tryckta spänningsvågen: $v_0 - (v_0 - \Delta U_{pB}) = \Delta U_{pB}$ åt höger. Notera ifall materialen hade varit lika hade den relativa hastigheten mellan stavarna v_R varit noll i gränsskiktet och partikelhastigheten hade blivit noll, det vill säga samma som en stöt mot en fix vägg.

För stav B eftersom den stod stilla innan stöten blir ändring i partikelhastighet lika med ΔU_{pB} och en tryckt spänningsvåg genereras där spänningen är:

$$\sigma_B = \rho_B c_B \Delta U_{pB} \quad (\text{A:6d})$$

Jämviktssamband i gränsskiktet ger

$$\sigma = \sigma_A = \sigma_B$$

$$\rho_A c_A \Delta U_{pA} = \rho_B c_B \Delta U_{pB} \quad (\text{A:6e})$$

$$\rho_A c_A (v_0 - \Delta U_{pB}) = \rho_B c_B \Delta U_{pB}$$

sätt in $\rho_A = \frac{1}{4} \rho_B, c_A = 2c_B$ och lös ut partikelhastighet ΔU_{pB} då fås

$$\frac{1}{4} \rho_B 2c_B (v_0 - \Delta U_{pB}) = \rho_B c_B \Delta U_{pB} \Rightarrow \Delta U_{pB} = \frac{v_0}{3} \quad (\text{A:6f})$$

Samma resultat fås med ekvation (2:411l). I detta ögonblick är hastigheten i gränsskiktet $v_0/3$ åt höger. Hastigheten i stav A sjunker successivt till $v_0/3$ och ökar till $v_0/3$ fram till tidpunkt $t < A$, det vill säga den tryckta spänningsvågen har inte nått till punkt A i diagrammet.

Ändring i partikelhastigheten i stav A är nu:

$$\Delta U_{pA} = (v_0 - \Delta U_{pB}) = (v_0 - \frac{v_0}{3}) = \frac{2}{3} v_0 \quad (\text{A:6g})$$

På motsvarande sätt som för ändring i partikelhastighet för stav B fås samma resultat med ekvation (2:411k). När den tryckta spänningsvågen i stav A, som är på väg mot vänster, når den fria änden reflekteras den och blir dragen. Med en associerad partikelhastighet på $(v_0 - \Delta U_{pB})$ åt vänster. Netto partikelhastighet blir den ursprungliga hastigheten minus hastigheten orsakad av den tryckta vågen minus den orsakad av den dragna vågen: $v_0 - (v_0 - \Delta U_{pB}) - (v_0 - \Delta U_{pB}) = - (v_0 - 2 \Delta U_{pB})$, det vill säga hastighet på $(v_0 - 2 \Delta U_{pB})$ åt vänster. Spänningen blir noll i staven eftersom den tryckta och den dragna spänningsvågen tar ut varandra.

När den dragna spänningsvågen som vandrar i stav A från punkt A till B i diagrammet når punkten B kan den inte transmittas till stav B, eftersom en

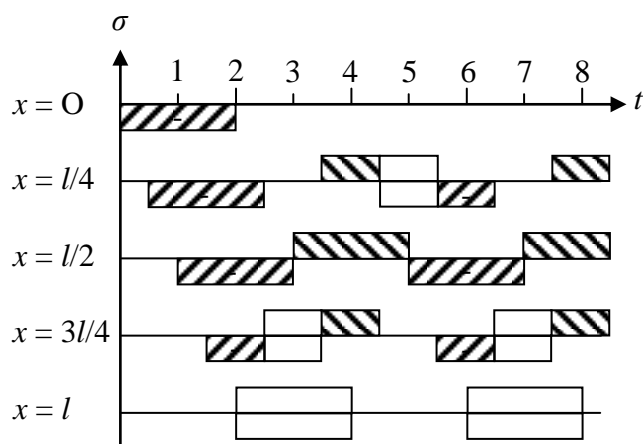
Splitterverkan

dragen våg inte kan transmittas från en stav till annan. Därmed reflekteras den dragna vågen som om det vore en fri ände och det genereras en tryckt våg åter. I punkt B separerar de båda stavarna och stav A rör sig åt vänster med hastigheten $(v_0 - 2 \Delta U_{pB})$, det vill säga $v_0/3$ åt vänster.

Efter punkt C erhålls totalt två dragna och två tryckta spänningsvågor som släcker ut varandra och spänningen är noll i staven.

Stav B erhåller en partikelhastighet på $U_{pB} = \Delta U_{pB}$ vid stöten, där $U_{pB} = v_0/3$ åt höger och en tryckt spänningsvåg åt höger. Eftersom de två stavarna hinner separera (stav A rör sig åt vänster vid punkt B i diagrammet) innan den tryckta spänningsvågen hinner reflektera och åter komma tillbaks till den vänstra delen av stav B (punkt D) kommer samtliga reflexioner att ske i stav B mot en fri ände. Detta innebär att vid varje reflexion fås ett teckenbyte.

Spänningen i stav B varierar över längden och med tiden. Utifrån Lagrange-diagrammet kan spänningen tas fram i varje snitt genom att dra en vertikal linje i detta snitt. Figur A:6b redovisar spänningsvariationen med tiden för fjärdedelspunkterna för stav B. För $x = 0$, det vill säga vänstra änden i stav B, genereras en tryckt spänningsvåg så länge stav A och stav B är i kontakt, motsvarande tidpunkt B (och K) i Lagrangediagrammet. I högra änden för $x = l$ är spänningen noll där tryck- och dragspänningen släcker ut varandra.



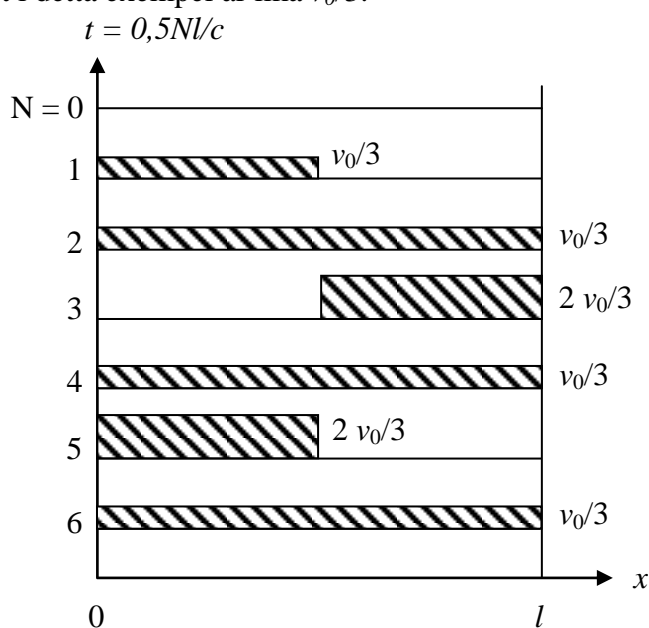
Figur A:6b. Spänningsvariation i fjärdedelspunkter för stav B. Baserad på Zukas (1990).

Partikelhastigheten för stav B varierar också. När stav A stöter emot stav B ökar blir partikelhastigheten U_{pB} i stav B till $v_0/3$. Den initiella tryckta spänningsvågen täcker området OBJK i Lagrangediagrammet. Vid reflexion i punkt K skapas en dragna spänningsvåg, med en associerad partikelhastighet U_{pB} mot höger. Denna dragna våg täcker området KDFJ. När denna våg åter propagerat tillbaks reflekterar den som en tryckt våg och processen fortsätter så vid varje gång när vågen når en fri ände. I områdena KLJ, DFM, JMH, HNG är spänningen noll eftersom tryck- och dragvågen släcker ut varandra. I dessa områden är nettopartikelhastigheten summan av den som orsakats av den tryckta och den dragna vågen lika med $2 U_{pB}$. I områdena

Splitterverkan

OBLK och MFNH är det ett ren tryckt spänningsvåg, medan i området LDMJ är det en ren dragen våg. I området BDL är spänningen noll eftersom ingen våg passerar detta område.

Figur A:6c visar nettopartikelhastighet i stav B för $t = Nl/c$, där l/c är tiden för vågen att propagera igenom staven. Exempelvis för $N = 2$ har vågen nått den högra änden, och för $N = 4$ har vågen gått fram och tillbaks i staven. Partikelhastigheten i staven varierar mellan noll, U_{pB} och $2 U_{pB}$. Där hastigheten är noll är motsvarande spänning noll, där hastigheten är U_{pB} existerar antingen en tryckande eller en dragande spänningsvåg. Där hastigheten är $2 U_{pB}$ existerar både en tryckande och en dragande våg samtidigt, och därmed är spänning också noll eftersom tryck och dragvågen släcker ut varandra. Den slutgiltiga hastigheten utjämnar sig dock till U_{pB} åt höger, vilket i detta exempel är lika $v_0/3$.



Figur A:6c. Hastighet hos stav B för olika tidpunkter. Tiden visas som $t = 0,5 Nl/c$. Baserad på Zukas (1990).

En bra kontroll är att kontrollera att lagen om konservering av rörelsemängd är uppfyllt, det vill säga att produkten massan och hastighet skall vara lika före och efter stöt:

$$m_A U_{pAI} + m_B U_{pBI} = m_A U_{pA} + m_B U_{pB} \Rightarrow$$

$$m_A v_0 + 0 = m_A \left(-\frac{v_0}{3}\right) + m_B \frac{v_0}{3} \quad (\text{A:6h})$$

eftersom $m_B = 4m_A$ (tvärsnittarean är densamma) fås

$$m_A v_0 = m_A \left(\frac{-v_0}{3}\right) + 4m_A \frac{v_0}{3} = m_A v_0 \quad \text{OK} \quad (\text{A:6i})$$

Splitterverkan

Klassisk stelkroppsdyamik ger följande resultat, där stav A har hastigheten v_0 och stav B står still, samt att massan för stav B är fyra gånger större än för stav A:

$$v_{Ae} = v_{Af} \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} = v_0 \frac{1 - 4}{1 + 4} = -\frac{3}{5}v_0 \quad (\text{A:6j})$$

$$v_{Be} = \frac{2v_{Af}m_A}{m_A + m_B} = \frac{2v_0}{1 + 4} = \frac{2}{5}v_0 \quad (\text{A:6k})$$

Stav A rör sig åt vänster med hastigheten $-3/5 v_0$ och stav B rör sig åt höger med hastigheten $2/5 v_0$.

Lagen om konservering av rörelsemängd ger:

$$m_A v_{Af} + m_B v_{Bf} = m_A v_{Ae} + m_B v_{Be} \quad (\text{A:6l})$$

Före stöt:

$$m_A v_{Af} + m_B v_{Bf} = m_A v_0 + 0 = m_A v_0 \quad (\text{A:6m})$$

Efter stöt:

$$m_A v_{Ae} + m_B v_{Be} = m_A \left(-\frac{3}{5}v_0\right) + m_B \frac{2}{5}v_0 \quad (\text{A:6n})$$

förenling ger:

$$m_A \left(-\frac{3}{5}v_0\right) + 4m_A \frac{2}{5}v_0 = m_A v_0 = VL \quad \text{OK} \quad (\text{A:6o})$$

där VL = vänsterled.

För stötar mellan två olika stavar måste därmed vågpropagering beaktas, vilket kan resultera i olikformigt spänningstillstånd i staven med varierande partikelhastigheter i samma stav. Dock utjämnar sig spänningen och partikelhastigheten över tiden på grund av spridning och dämpning.

A:7 Exempel med plastisk stöt beräknat med stötvågsparametrar

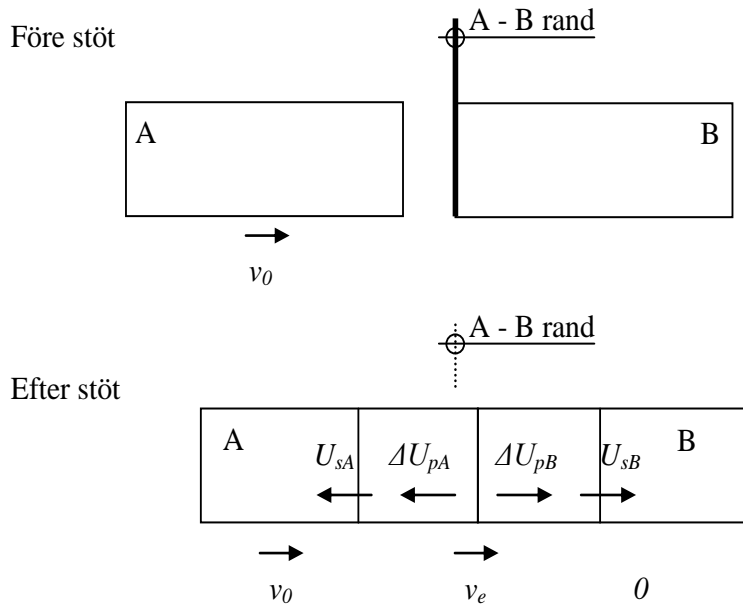
I avsnitt 2:6 beskrivs hur en plastisk stöt beräknas med stötvågsparametrar. I detta appendix visas tre numeriska exempel. Det första är en plastisk stöt enligt avsnitt A:71. Det andra exemplet är en plastisk stöt mellan två olika material, se avsnitt A:72, medan det tredje exemplet är en plastisk stöt mellan två olika material, se avsnitt A:73, dock är längden för stav B längre

Splitterverkan

än för stav A. Längden för stav B bestäms på så sätt att stötvågsfronten når den fria änden samtidigt i båda stavarna.

A:71 *Plastisk stöt mellan identiska stavar*

Studera figur A:71a, där en plastisk stöt mellan två stavar sker. Stavarna träffar varandra vid randen A – B rand, stav A har hastigheten $v_0 = 800$ m/s, medan stav B står still innan stöt. Efter stöt rör sig båda stavarna åt höger med hastigheten v_e .



Figur A:71a. Plastisk stöt mellan två stavar.

Antag att en projektil av järn (FE enligt tabell A:4a) träffar ett mål av samma material med, med följande materialegenskaper:

$$\rho_0 = \rho_{0A} = \rho_{0B} = 7\,850 \text{ kg/m}^3$$

$$C_0 = C_{0A} = C_{0B} = 3570 \text{ m/s} = 3,57 \text{ km/s} \quad (\text{A:71a})$$

$$\text{och } S_I = S_A = S_B = 1,92.$$

enligt ekvation (2:6p) blir:

$$U_{pB} = \frac{1}{2} v_0 = 0,5 \cdot 800 = 400 \text{ m/s} \quad (\text{A:71b})$$

$$U_{sB} = 3570 + 1,92 \cdot 0,5 \cdot 800 = 4338 \text{ m/s} \quad (\text{A:71c})$$

Nu med kännedom om partikelhastighet och stötvågshastighet beräknas de olika stötvågsparametrarna fram, där trycket P blir:

Splitterverkan

$$\begin{aligned} P_B &= \rho_{0B}(C_{0B} + S_{1B}U_{pB})U_{pB} \\ &= 7850 \cdot (3570 + 1,92 \cdot 0,5 \cdot 800) \cdot 0,5 \cdot 800 = 13,62 \cdot 10^9 \\ &= 13,62 \text{ GPa} \end{aligned} \quad (\text{A:71d})$$

Trycket blir väldigt högt. Vi befinner oss långt ifrån det statiska fallet, nu är trycknivån så hög att elasto-plastiskt uppförande av materialet kan försummas och stötvågsteori kan appliceras. Trycket vid randen mellan stav A och B är lika, det vill säga:

$$P_A = P_B \quad (\text{A:71e})$$

Densitet beräknas fram med ekvation (2:5a):

$$\rho = \frac{\rho_0 U_s}{(U_s - U_p)} = \frac{7850 \cdot 4338}{4338 - 400} = 8647 \text{ kg/cm}^3 \quad (\text{A:71f})$$

För att studera energibalansen återgår vi till ekvation (2:3a).

$$E_f + m_A \frac{v_{Af}^2}{2} + m_B \frac{v_{Bf}^2}{2} = E_e + m_A \frac{v_{Ae}^2}{2} + m_B \frac{v_{Be}^2}{2} + W \quad (\text{A:71g})$$

Vänster led av ekvation, sätt $m_A = m_B = 1$, det vill säga vi studerar en enhetsmassa 1:

$$E_f + m_A \frac{v_{Af}^2}{2} + m_B \frac{v_{Bf}^2}{2} = 0 + 1 \cdot \frac{800^2}{2} + 0 = 320 \text{ kJ} \quad (\text{A:71h})$$

Båda stavarna var spänningslösa, det vill säga att den inre energin var noll, hastigheten för stav A var 800 m/s före stöt medan stav B stod still före stöt.

Ändring i den inre energin kan beräknas ur ekvation (2:5c), då trycket P_0 är noll och den inre energin är noll före stöt. Konservering av inre energi ger:

$$\begin{aligned} E_e - E_f &= E_e - 0 = E_e = \frac{1}{2}(P + P_0)\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho}\right) \\ &= \frac{1}{2}(13,62 \cdot 10^9 + 0)\left(\frac{1}{7850} - \frac{1}{8647}\right) = 80 \text{ kJ} \end{aligned} \quad (\text{A:71i})$$

Högerledet av ekvation (A:71g) består av de båda stavarnas rörelseenergi samt den inre energin efter stöten. Det yttre arbete W är noll eftersom inga yttre krafter har tillförts systemet. Hastigheten för stav A och stav B blir 400 m/s efter stöt. Därmed blir höger led i ekvation (A:71g):

$$E_e + m_A \frac{v_{Ae}^2}{2} + m_B \frac{v_{Be}^2}{2} = 1 \cdot 2 \cdot 80 \cdot 10^3 + 1 \cdot \frac{400^2}{2} + 1 \cdot \frac{400^2}{2} = 320 \text{ kJ} \quad (\text{A:71j})$$

Splitterverkan

det vill säga båda stavarna har utsatts för en inre energi på 80 kJ vardera (per/massenhet). Eftersom detta är en fullständig plastisk stöt har denna energi nyttjats till att komprimera båda stavarna så att densiteten har ökat från $7\,850\text{ kg/m}^3$ till $8\,647\text{ kg/m}^3$.

Med klassisk stelkroppsdynamik fås hastighet efter stöt för en plastisk stöt då $m_A = m_B$ enligt ekvation (2:32b).

$$v_e = \frac{m_A v_0}{m_A + m_B} = \frac{1}{2} v_0 = 0.5 \cdot 800 = 400\text{ m/s} \quad (\text{A:71k})$$

det vill säga att hastigheten efter stöt blir densamma som vid en stötvågsanalys.

A:72 *Plastisk stöt mellan två stavar av olika material*

I nästa exempel studerar vi två olika material med samma längd som stöter emot varandra. Låt en stålprojektil med hastigheten $v_0 = 1\,200\text{ m/s}$ träffa ett mål av aluminium som står stilla, jämför figur A:7a.

Stålprojektilen (stav A) och aluminium (stav B) har tillståndsekvationerna:

$$U_{sA} = C_{0A} + S_{1A} \Delta U_{pA} = 3570 + 1,92 \Delta U_{pA} \quad (\text{A:72a})$$

$$U_{sB} = C_{0B} + S_{1B} \Delta U_{pB} = C_{0B} + S_{1B} U_{pB} = 5330 + 1,34 U_{pB} \quad (\text{A:72b})$$

Densitet för stål är $\rho_{0A} = 7\,850\text{ kg/m}^3$ och för aluminium $\rho_{0B} = 2\,790\text{ kg/m}^3$.

Med ekvation (2:6j) fås partikelhastigheten för stav B:

$$U_{pB} = \frac{-(2790 \cdot 5330 + 7850 \cdot 3570 + 2 \cdot 7850 \cdot 1,92 \cdot 1200) \pm \sqrt{\Delta}}{2(2790 \cdot 1,34 - 7850 \cdot 1,92)} \quad (\text{A:72c})$$

$$\text{där } \Delta = (2790 \cdot 5330 + 7850 \cdot 3570 + 2 \cdot 7850 \cdot 1,92 \cdot 1200)^2 + 4 \cdot 7850(3570 \cdot 1200 + 1,92 \cdot 1200^2)(2790 \cdot 1,34 - 7850 \cdot 1,92) \quad (\text{A:72d})$$

rötterna blir:

$$U_{pB1} = 789\text{ m/s} \quad (\text{A:72e})$$

$$U_{pB2} = 6187\text{ m/s} \quad (\text{A:72f})$$

Partikelhastigheten kan inte vara större än v_0 , vilket ger att:

$$U_{pB} = 789\text{ m/s} \quad (\text{A:72g})$$

Splitterverkan

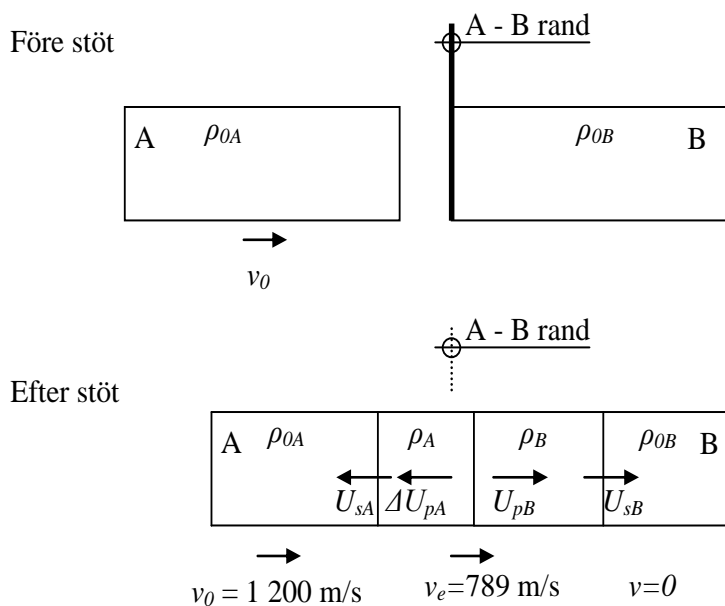
ändring i partikelhastighet för stav A blir enligt ekvation (2:6d):

$$\Delta U_{pA} = v_0 - \Delta U_{pB} = v_0 - U_{pB} = 1200 - 789 = 411 \text{ m/s} \quad (\text{A:72h})$$

stav A:s partikelhastighet bakom stötvågsfronten blir därmed:

$$U_{pA} = v_0 - \Delta U_{pA} = 1200 - 411 = 789 = \Delta U_{pB} = U_{pB} \quad (\text{A:72i})$$

det vill säga att båda stavarna rör sig med hastigheten 789 m/s direkt efter stöten. Dock är hastigheten fortfarande noll för stav B framför stötvågsfronten som rör sig åt höger och hastigheten för stav A 1 200 m/s framför stötvågsfronten som rör sig åt vänster, enligt figur A:72b.



Figur A:72b. Hastighet hos två stavar efter stöten.

Stötvågshastigheterna för stav A och B blir enligt ekvationerna (2:6f) och (2:6g).

$$U_{sA} = 3570 + 1,92 \cdot 411 = 4359 \text{ m/s} \quad (\text{A:72j})$$

$$U_{sB} = 5330 + 1,34 \cdot 789 = 6387 \text{ m/s} \quad (\text{A:72k})$$

I och med att partikelhastigheterna och stötvågshastigheterna nu är kända kan samtliga stötvågsparametrar beräknas ur Rankine-Hugoniot ekvationerna.

Trycket blir med ekvation (2:6a):

$$P_A = \rho_{0A} U_{sA} \Delta U_{pA} = 7850 \cdot 4359 \cdot 411 = 14,1 \cdot 10^9 = 14,1 \text{ GPa} \quad (\text{A:72l})$$

Splitterverkan

En kontroll nedan görs att trycket är lika i båda stavarna:

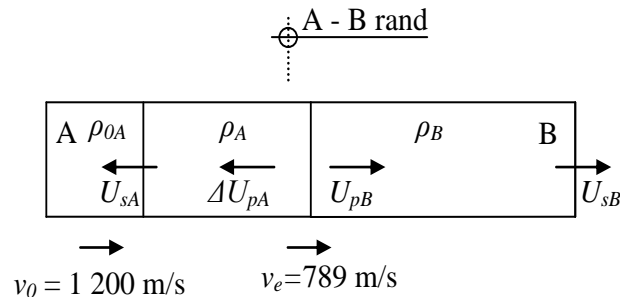
$$P_B = \rho_{0B} U_{sB} \Delta U_{pB} = 2790 \cdot 6387 \cdot 789 = 14,1 \cdot 10^9 = 14,1 \text{ GPa OK! (A:72m)}$$

Densitet beräknas fram i det tryckta materialet med ekvation (2:5a):

$$\rho_A = \frac{\rho_{0A} U_{sA}}{(U_{sA} - \Delta U_{pA})} = \frac{7850 \cdot 4359}{4359 - 411} = 8667 \text{ kg/cm}^3 \quad (\text{A:72n})$$

$$\rho_B = \frac{\rho_{0B} U_{sB}}{(U_{sB} - \Delta U_{pB})} = \frac{\rho_{0B} U_{sB}}{(U_{sB} - U_{pB})} = \frac{2790 \cdot 6387}{6387 - 789} = 3183 \text{ kg/cm}^3 \quad (\text{A:72o})$$

För att beräkna energibalansen måste det beaktas att stötvågshastigheterna för stav A och stav B skiljer sig åt, dessutom är densiteten ej densamma. Studera figur A:72c vid tidpunkt då stötvågen för stav B har nått den högra änden av staven. Vid denna tidpunkt har inte stötvågen i stav A nått den vänstra änden ännu. Stav B har hastigheten 789 m/s medan stav A har begynnelsehastigheten 1 200 m/s framför stötvågsfronten och hastigheten 789 m/s bakom stötvågsfronten.



Figur A:72c. Hastighet hos två stavar som stöter emot varandra.

Energibalansen i ekvation (2:4a) ger:

$$E_f + m_A \frac{v_{Af}^2}{2} + m_B \frac{v_{Bf}^2}{2} = E_e + m_A \frac{v_{Ae}^2}{2} + m_B \frac{v_{Be}^2}{2} + W \quad (\text{A:72p})$$

nu skiljer sig m_A från m_B , eftersom densiteten är olika hos dessa två stavar.

Energien före stöt består av enbart kinetisk energi från stav A, vilket ger vänster led i ekvation (A:72aa):

$$E_f + m_A \frac{v_{Af}^2}{2} + m_B \frac{v_{Bf}^2}{2} = 0 + \rho_{0A} AL \frac{v_0^2}{2} + 0 \quad (\text{A:72q})$$

Splitterverkan

där massan m_A uttrycks som densitet multiplicerat med volymen av staven, vilket ger den kinetiska energin före stöt som:

$$E_{före} = \rho_{0A} AL \frac{v_0^2}{2} = 7850 \cdot \frac{1200^2}{2} AL = 5,65 \cdot 10^9 AL \text{ [J]} \quad (\text{A:72r})$$

Studera högerled i ekvation (A:72aa), den består av inre energi (töjningsenergi) samt kinetisk energi vid tidpunkten då stötvågsfronten har nått högra änden i stav B, se figur A:72c:

Ifall hela staven A trycks ihop fås ändringen i den inre energin som:

$$\frac{E_A - E_0}{m_A} = \frac{1}{2} (P_A + P_{0A}) \left(\frac{1}{\rho_{0A}} - \frac{1}{\rho_A} \right)$$
$$E_A - E_0 = \frac{1}{2} (P_A + P_{0A}) \left(\frac{1}{\rho_{0A}} - \frac{1}{\rho_A} \right) \rho_0 AL \quad (\text{A:72s})$$

$$E_A - 0 = \frac{1}{2} (14,61 + 0) \left(\frac{1}{7850} - \frac{1}{8667} \right) \cdot 7859 \cdot 1 \cdot 1 = 0,663 \cdot 10^9 AL$$

där $m_A = \rho_0 AL$, det vill säga densitet multiplicerat med volymen.

Dock har inte hela stav A trycks ihop när stötvågsfronten i stav B har nått dess högra ände, se figur A:72c. Tiden för stötvågsfronten i stav B för att nå högra änden är sträckan L delat med stötvågshastigheten U_{sB} :

$$t = \frac{L}{U_{sB}} \quad (\text{A:72t})$$

på denna tid har stötvågsfronten nått sträckan x i stav A till vänster:

$$x = tU_{sA} = \frac{L}{U_{sB}} U_{sA} \Rightarrow \frac{x}{L} = \frac{U_{sA}}{U_{sB}} \quad (\text{A:72u})$$

det vill säga att läget för stötvågsfronten beräknas som kvoten mellan stötvågshastigheterna. Den inre energin för stav A när stötvågsfronten har nått läge x i staven blir:

$$E_A \frac{U_{sA}}{U_{sB}} = 0,663 \cdot 10^9 AL \cdot \frac{4359}{6387} = 0,452 \cdot 10^9 AL \text{ [J]} \quad (\text{A:72v})$$

För Stav B har stötvågsfronten nått högra änden av staven och därmed har hela staven tryckts ihop, den inre energin blir:

Splitterverkan

$$\begin{aligned}
 E_B - E_{0B} &= \frac{1}{2} (P_B + P_{0B}) \left(\frac{1}{\rho_{0B}} - \frac{1}{\rho_B} \right) \rho_{0B} AL \\
 \Rightarrow E_B - 0 &= \frac{1}{2} (14,61 \cdot 10^9 + 0) \left(\frac{1}{2790} - \frac{1}{8667} \right) \cdot 2790 \quad (\text{A:72w}) \\
 &= 0,869 \cdot 10^9 AL
 \end{aligned}$$

Den kinetiska energin för stav A (vid tidpunkt då stötvågsfronten har nått högra änden i stav B) består av summan av den del av staven som har bromsats upp, samt den del av staven som ännu inte har hunnit bromsats upp då den träffade stav B. Andelen av staven längd som hastigheten har minskat till

$$v_0 - \Delta U_{pA} = U_{pB} \text{ är } \frac{U_{sA}}{U_{sB}} \text{ av stav A:s längd,} \quad (\text{A:72x})$$

medan

$$\left(1 - \frac{U_{sA}}{U_{sB}}\right) \text{ av stav A:s längd har fortvarande hastigheten } v_0. \quad (\text{A:72y})$$

Den kinetiska energin för stav A blir därmed:

$$\begin{aligned}
 &\frac{U_{sA}}{U_{sB}} \rho_{0A} AL \frac{(v_0 - \Delta U_{pA})^2}{2} + \left(1 - \frac{U_{sA}}{U_{sB}}\right) \rho_{0A} AL \frac{v_0^2}{2} \\
 &= \frac{4359}{6387} 7850 AL \frac{(1200 - 411)^2}{2} + \left(1 - \frac{4359}{6387}\right) 7850 AL \frac{1200^2}{2} \quad (\text{A:72z}) \\
 &= 3,463 \cdot 10^9 AL
 \end{aligned}$$

Den kinetiska energin för stav B blir:

$$\rho_{0B} AL \frac{U_{pB}^2}{2} = 2790 \frac{789^2}{2} AL = 0,869 \cdot 10^9 AL \quad (\text{A:72aa})$$

Högerledet i ekvation (A:72z) blir därmed:

$$\begin{aligned}
 E_{\text{efter}} &= \frac{U_{sA}}{U_{sB}} E_A AL + E_B AL + \\
 &\frac{U_{sA}}{U_{sB}} \rho_{0A} AL \frac{(v_0 - \Delta U_{pA})^2}{2} + \left(1 - \frac{U_{sA}}{U_{sB}}\right) \rho_{0A} AL \frac{v_0^2}{2} + \rho_{0B} AL \frac{U_{pB}^2}{2} \quad (\text{A:72ab})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{\text{efter}} &= (0,452 + 0,869 + \\
 &1,668 + 1,795 + 0,869) \cdot 10^9 AL = 5,65 \cdot 10^9 AL \quad (\text{A:72ac})
 \end{aligned}$$

det vill säga samma som energin före stöt, se ekvation (A:72r). Vid denna tidpunkt har inte hela kinetiska energin i stav A hunnit överföras till stav B eftersom stötvågen inte har nått den vänstra änden av stav A och har därmed inte bromsats upp helt av stöten.

A:73 *Plastisk stöt mellan två stavar av olika material med olika längder*

Nästa exempel visar samma stöt men med skillnaden att stav B är längre. Längden på den bestäms så att stötvågsfronten i stav A når änden i stav A samtidigt som stötvågsfronten i stav B når änden i denna stav. Eftersom stötvågen går snabbare i stav B måste denna vara längre med längden:

$$L_B = L_A \frac{U_{sB}}{U_{sA}} = \frac{6387}{4359} = 1,465L_A \quad (\text{A:73a})$$

Energien före stöt är densamma enligt ekvation (A:72r). Den totala energin efter stöt blir också densamma, dock omfördelas energin, där stav A:s kinetiska energi avges till stav B. Den inre energin för stav A blir enligt ekvation (A:72s):

$$E_A = 0,663 \cdot 10^9 AL_A \quad (\text{A:73b})$$

för stav B blir den inre energin enligt ekvation (A:72w):

$$E_B = 0,869 \cdot 10^9 AL_B \quad (\text{A:73c})$$

Kinetisk energi för stav A blir:

$$\rho_{0A} AL_A \frac{U_{pB}^2}{2} = 7850 \frac{789^2}{2} AL_A = 2,443 \cdot 10^9 AL_A \quad (\text{A:73d})$$

För stav B blir kinetisk energi

$$\rho_{0B} AL_B \frac{U_{pB}^2}{2} = 2790 \frac{789^2}{2} AL_B = 0,869 \cdot 10^9 AL_B \quad (\text{A:73e})$$

Den totala energin efter stöt fås därmed genom att summera den inre energin för stav A och B, samt den kinetiska energin för stav B.

Splitterverkan

$$\begin{aligned} E_{\text{efter}} &= E_A AL_A + E_B AL_B + \rho_{0A} AL_A \frac{U_{pB}^2}{2} + \rho_{0B} AL_B \frac{U_{pB}^2}{2} \\ &= \left[(E_A + \rho_{0A} \frac{U_{pB}^2}{2}) L_A + (E_B + \rho_{0B} \frac{U_{pB}^2}{2}) L_B \right] A \quad (\text{A:73f}) \\ &= [(0,663 + 2,443) L_A + (0,869 + 0,869) L_B] \cdot 10^9 A \\ &= (3,106 L_A + 1,738 \cdot 1,465 L_A) \cdot 10^9 A = 5,65 \cdot 10^9 AL_A \end{aligned}$$

det vill säga samma kinetiska energi som stav A hade innan stöten.

Med klassisk stelskroppsdyamik fås hastighet efter stöt för en plastisk stöt då enligt ekvation (2:23a).

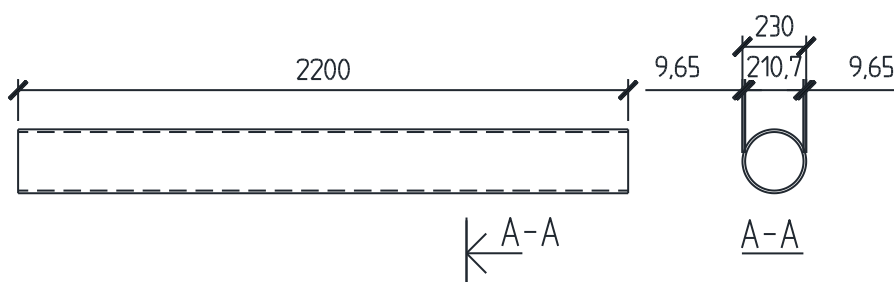
$$\begin{aligned} v_e &= \frac{m_A v_0}{m_A + m_B} = \frac{\rho_{0A} AL_A v_0}{\rho_{0A} AL_A + \rho_{0B} AL_B} = \\ &= \frac{\rho_{0A} v_0}{\rho_{0A} + 1,465 \rho_{0B}} = \frac{7850 \cdot 1200}{7850 + 1,465 \cdot 2790} = 789 \text{ m/s} \quad (\text{A:73g}) \end{aligned}$$

det vill säga att hastighet efter stöt blir densamma som vid en stötvågsanalys. Dock fås ingen mer information med klassisk stelskroppsdyamik.

Bilaga B Splitter - detaljer

B:1 Arkivbomb

För att ta fram en ekvivalent bomb med enkel geometri antas en cylindrisk form för bomben. Denna ekvivalenta cylinder benämns arkivbomb och gäller endast vid framtagning av splitterdata. För luftstötstång är laddningen sfärisk och det finns inget hölje. Arkivbomben redovisas i figur B:1a, samt med data enligt tabell B:1a. Nosen och den bakre delen består av icke splittergivande massor och därmed beaktas dessa partier inte vid framtagning av en ekvivalent bomb. Storleken på denna bomb har anpassats för att ge motsvarande splitterfördelning som systembomben beskrivet i avsnitt 3:1. Denna systembomb är en minbomb m/50 med splitterdata enligt tabell B:1b.



Figur B:1a. Arkivbomb. Fiktiv cylindrisk bomb vars lasteffekt motsvarar en 250 kg minbomb. Nosen och den bakre delen består av icke splittergivande massor, dessa partier beaktas inte.

Tabell B:1a. Data för arkivbomb.

Form	Cylindrisk
Massa bomb, M_b	250 kg
Massa sprängmedel, TNT ¹⁾ , W	125 kg
Splittergivande massa	114,6 kg
Längd, L	2,2 m
Ytterdiameter, d_b	230 mm
Innerdiameter, d_i	210,7 mm
Höljets tjocklek, t_h	9,65 mm
Splitterfördelningsparameter, M_A ²⁾	$2,28 \text{ g}^{1/2} / \text{mm}^{7/6}$
Motts konstant ³⁾	$3,67 \text{ kg}^{1/2} / \text{m}^{7/6}$

¹⁾ densitet för TNT = 1630 kg/m^3 enligt Johansson och Laine (2007)

²⁾ beräknas enligt ekvation (3:31c)

Splitterverkan

Tabell B:1b. Data för en minbomb m/50 enligt Andersson *et al.* (1989).

Viktclass [g]			Ackumulerat	
	Antal	Massa [g]	Antal	Massa [g]
> 63,5	128	16 121	128	16 121
32,5 - 63,5	452	18 191	580	34 312
15,5 - 32,5	1 547	33 582	2 127	67 894
8,5 - 15,5	1 407	15 944	3 534	83 838
3,8 - 8,5	2 794	15 187	6 328	99 025
2,5 - 3,8	1 682	5 233	8 010	104 258
1,5 - 2,5	2 463	4 769	10 473	109 027
1,0 - 1,5	2 370	2 955	12 843	111 982
0,5 - 1,0	3 606	2 632	16 445	114 614
0,1 - 0,5	9 683	2 372	26 128	116 986
Summa:	26 128	116 986		

För att ta fram arkivbomben har ackumulerat antal splitter n_{ms} , enligt ekvation (3:31a), tagits fram för olika cylindriska bomber med varierande längd. Därefter har det ackumulerade antalet splitter för dessa ekvivalenta cylindrar jämförts med data från experiment med en minbomb m/50 enligt tabell B1:b. Ekvation för antalet splitter med massan större än m_s lyder:

$$n_{ms} = \frac{M_h}{2M_A} e^{-\sqrt{\frac{m_s}{M_A}}} \quad (\text{B:1a})$$

där M_h är höljets massa och M_A är en splitterfördelningsparameter. Splitterfördelningsparametern fås enligt ekvation (3:31c) som:

$$M_A = B^2 \cdot t_h^{5/3} \cdot d_i^{2/3} \left(1 + \frac{t_h}{d_i}\right)^2 \quad (\text{B:1b})$$

Motts konstant B hämtas ur tabell 3:31a, för TNT är denna $3,67 \text{ kg}^{1/2}/\text{m}^{7/6}$. Nedan följer hur de ingående parametrarna är framtagna för olika ekvivalenta cylindrar.

Arkivbomben har en total massa på 250 kg och mängden sprängmedel W är 125 kg TNT och volym för sprängmedel V_W kan beräknas som:

$$V_W = \frac{W}{\rho_{TNT}} \quad (\text{B:1c})$$

Där densitet för TNT fås enligt Johansson och Laine (2007):

$$\rho_{TNT} = 1630 \text{ kg/m}^3 \quad (\text{B:1d})$$

Splitterverkan

För att ta fram en ekvivalent cylinder antas först en längd L . Då längden är känd kan innerdiametern bestämmas enligt ekvation (3:323d) som:

$$d_i = \sqrt{\frac{4 \cdot V_w}{\pi \cdot L}} \quad (\text{B:1e})$$

Därefter bestäms höljets tjocklek så att splittergivande massa blir 115 kg. Höljets totala massa är 125 kg, varav ca 10 kg utgörs av nosen och den bakre delen. Dessa delar antas inte ge splittergivande massa. Med kännedom om bombens innerdiameter och höljets tjocklek kan ytterdiameter d_b bestämmas som:

$$d_b = 2t_h + d_i \quad (\text{B:1f})$$

Volymen för höljet beräknas enligt ekvation (3:323e) som:

$$V_h = \pi \cdot L \left(\frac{d_b^2}{4} - \frac{d_i^2}{4} \right) \quad (\text{B:1g})$$

Höljets massa beräknas som:

$$M_h = V_h \rho_{stål} \quad (\text{B:1h})$$

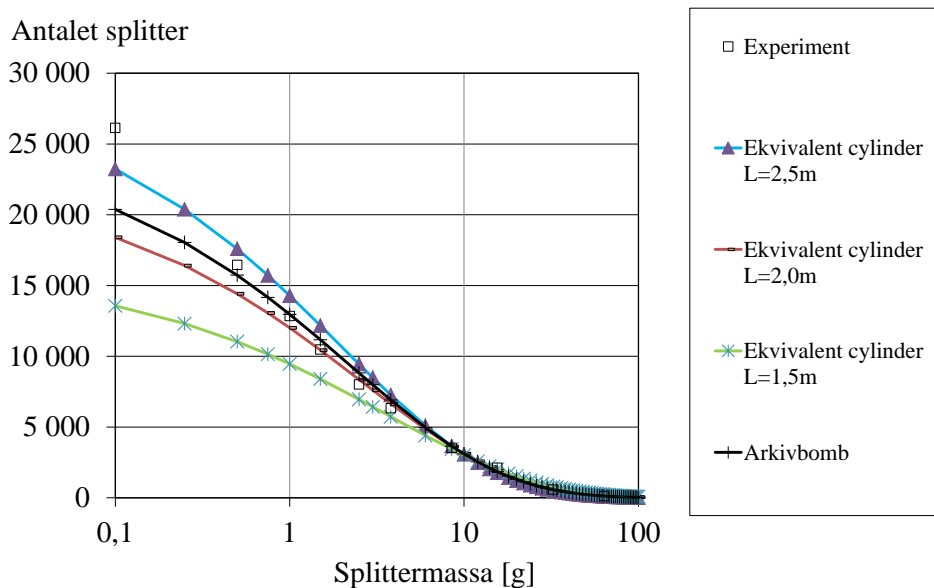
Där densitet för stål antas till:

$$\rho_{stål} = 7800 \text{ kg/m}^3 \quad (\text{B:1i})$$

En splitterfördelningsparameter har tagits fram för ekvivalenta cylindrar med längden 2,5 m, 2,0 m, 1,5 m samt 2,2 m. Den valda längden för arkivbomben är 2,2 m. Detta val är baserat på resultat redovisade i figur B:1b och figur B:1c. Arkivbomben ger bra överensstämmelse i jämförelse mellan experiment både för små och stora splitter. En ekvivalent cylinder med en kort längd ger många stora splitter i jämförelse med en ekvivalent cylinder med en lång längd. Detta beror på att höljets tjocklek blir större för den korta ekvivalenta cylindern än den långa. Antalet splitter är känslig för denna parameter. På motsvarande sätt fås många små splitter då längden ökar för den ekvivalenta cylindern.

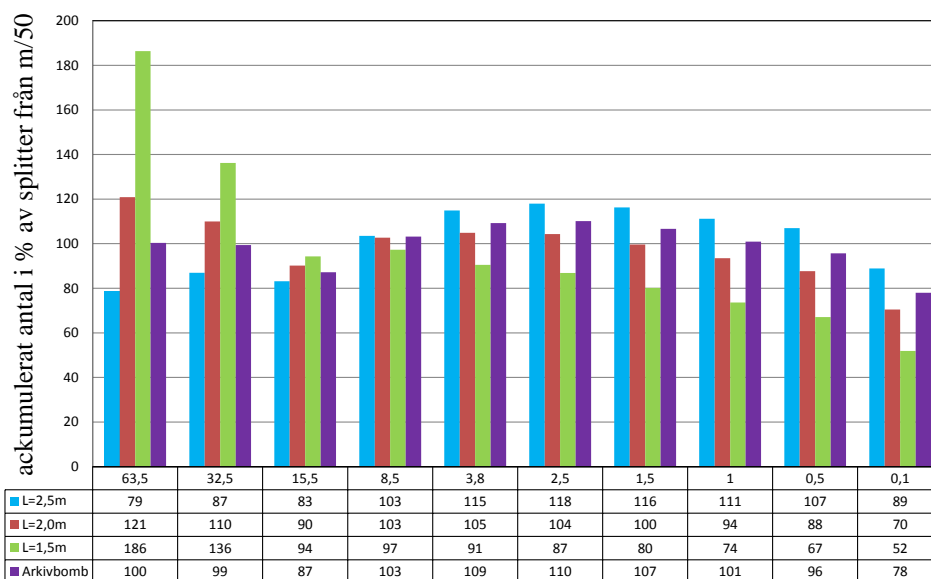
Den valda längden för arkivbomben är 2,2 m. Dimensioner för den ekvivalenta cylindern är avrundade, varav den splittergivande massan blir 114,6 kg istället för antagna 115 kg. Medan mängden sprängämne blir avrundat med en decimals noggrannhet till 125 kg. Data för arkivbomben redovisas i tabell B:1a.

Splitterverkan



Figur B:1b. Antalet splitter med en massa större än m_s . Jämförelse mellan splitter från minbomb $m/50$ och 4 olika ekvivalenta cylindrar. Experiment från Andersson *et al.* (1989). Arkivbomben har längden 2,2 m.

Arkivbomb



Figur B:1c. Ackumulerat antal splitter i % av splitter från minbomb $m/50$ från fyra olika ekvivalenta cylindrar. Experiment från Andersson *et al.* (1989). Arkivbomben har längden 2,2 m.

B:2 Omvandlingsfaktorer mellan inch-pound till SI-enheter

Tabell B:2a. Omvandlingsfaktorer mellan inch-pound till SI-enheter.

Benämning	Omvandla från	Omvandla till	Multiplitera med
f_1	inch	meter [m]	0,0254
f_2	fot [fps]	meter [m]	0,3048
f_3	kip-force/square inch [ksi]	Megapascal [MPa]	6,895
f_4	ounce-mass [oz]	kilogram[kg]	0,02834
f_5	pound [lb]	kilogram [kg]	0,4536

B:3 Splitterhastighet

Utgånshastighet, v_0 hos splitter kan bestämmas enligt ekvation (3:5a). Splitterhastigheten i luften, v_r avtar på grund av luftmotståndet med sträckan r och den kan bestämmas enligt ekvation (3:5b). Dessa ekvationer är enligt Engberg och Karevik (1987).

Motsvarande ekvationer finns i ConWep (1992) för att bestämma splitterhastighet. För en cylindrisk laddning fås utgångshastigheten hos splitter som:

$$v_0 = G \left[\frac{\left(\frac{W}{M_h} \right)}{1 + 0,5 \frac{W}{M_h}} \right]^{0,5} \quad (\text{B:3a})$$

där G är en explosivkonstant beroende på typ av sprängmedel, konstanten är känd som Gurneys konstant. W är sprängämnesmassa och M_h är höljets massa i [oz]. Konstanten G redovisas i tabell B:3a för olika explosivämnen.

För att beräkna utgångshastigheten i SI-enheter multipliceras värdet G i tabell B:3 med faktorn $f_2 = 0,3048$ enligt omvandlingsfaktorer i tabell B:2a (sprängämnesmassan W och höljets massa M_h kan anges i godtycklig enhet eftersom det är kvoten av samma enhet som används).

Splitterverkan

Tabell B:3a. Urval av explosivkonstanter B och G enligt ConWep (1992).

Explosivämne	B [oz ^{1/2} /in. ^{7/6}]	G [kfps]
Baratol	0,51	5,2
Comp. B	0,22	8,8
Cyclotol (75/25)	0,20	8,9
H-6	0,28	8,6
HBX-1	0,32	8,1
HBX-3	0,26	-
Pentolite	0,25	8,1
TNT	0,30	7,6

Splitterhastigheten i luften, v_r avtar med sträckan r och beräknas enligt ConWep för ett standardsplitter som:

$$v_r = v_0 e^{-0,004r/\sqrt[3]{m_s}} \quad (\text{B:3b})$$

där v_0 beräknas enligt ekvation (B:3a) och m_s är splittermassa i [oz].

Ekvation (B:3b) kan skrivas om till SI-enheter enligt följande:

$$v_r = f_2 v_0 e^{-0,004 \frac{1}{f_2} r / \left(\sqrt[3]{m_s} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{f_4}} \right)} \quad (\text{B:3c})$$

där f_2 och f_4 är omvandlingfaktorer enligt tabell B:2a. Enhet för sträckan splittret har färdats i luft r blir meter och enhet för massan m_s blir kg. Kvoten blir:

$$\frac{\frac{1}{f_2}}{\sqrt[3]{\frac{1}{f_4}}} = \frac{1}{\frac{0,3048}{\sqrt[3]{0,02834}}} = 1 \quad (\text{B:3d})$$

Denna kvot råkar slumpa sig till 1,0 i detta fall och därmed kan hastigheten efter en sträcka r i luft kan beräknas till:

$$v_r = v_0 e^{-0,004r/\sqrt[3]{m_s}} \quad (\text{B:3e})$$

vilket är samma formel som enligt Engberg och Karevik (1987), se ekvation (3:5b).

I U.S. Department of Energy (1980) anges även utgångshastigheten för splitter för en sfärisk laddning:

Splitterverkan

$$v_0 = G \left[\frac{\left(\frac{W}{M_h} \right)}{1 + \frac{3W}{5M_h}} \right]^{0,5} \quad (\text{B:3f})$$

där G är explosivkonstant enligt tabell B:3a. Utgångshastighet hos splitter för en bomb med massan 250 kg med 50 % sprängmedel redovisas i tabell B:3b för olika explosivämnen. Skillnaden i utgångshastighet för splitter för explosivämnet TNT ($G = 7,6$) blir 60 m/s. Bomben med det cylindriska höljet ger en utgångshastighet på 1 891 m/s medan en bomb med ett sfäriskt hölje ger en utgångshastighet på 1 831 m/s.

Tabell B:3b. Utgångshastighet hos splitterhastighet för en bomb med massan 250 kg med 50 % sprängmedel enligt ConWep (1992) för cylindrisk laddning och enligt U.S. Department of Energy (1980) för sfärisk laddning för olika explosivämnen.

Explosivämne	Cylindrisk laddning [m/s]	Sfärisk laddning [m/s]
Baratol	1 294	1 253
Comp. B	2 190	2 120
Cyclotol (75/25)	2 215	2 145
H-6	2 140	2 072
HBX-1	2 016	1 952
Pentolite	2 016	1 952
TNT	1 891	1 831

Utgångshastighet hos splitter enligt ekvationen enligt Engberg och Karevik (1987) är inte beroende av typen av sprängmedel. Utgångshastigheten är endast beroende av mängden sprängämne och höljets massa. Utgångshastigheten för en bomb med massan 250 kg med 50 % sprängmedel fås till:

$$v_0 = 2400 \cdot (1 - e^{-2.125/125}) = 2075 \text{ m/s} \quad (\text{B:3g})$$

Ekvationer enligt ConWep och U.S Department of Energy ger en lägre splitterhastighet för en bomb med sprängämnet TNT, där en motsvarande bomb ger en utgångshastighet hos splitter på endast 1 831 m/s för en sfärisk laddning, se tabell B:3b. Orsaken varför ConWep ger lägre splitterhastigheter är oklart då laddningar med ekvivalent TNT jämförs. En orsak enligt Janzon (1973) kan vara att i de tidiga mätningarna av splitterhastighet mättes de snabbaste splittren i försöken. En annan förklaring kan vara att det inte är samma explosivämne som jämförs.

Splittrets retardation i luft enligt U.S. Department of Energy (1980) beräknas enligt följande:

Splitterverkan

$$v_r = v_0 e^{-12k_v r} \quad (\text{B:3h})$$

där

r är avståndet från detonationen in inches

k_v är en retardationskoefficient enligt följande:

$$k_v = \frac{A}{m_s} \rho_{\text{luft}} C_D \quad (\text{B:3i})$$

där

A är ekvivalent area för splittret där tvärsnittsarean omvandlas till en tvärsnittsarea för en cylinder:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \quad (\text{B:3j})$$

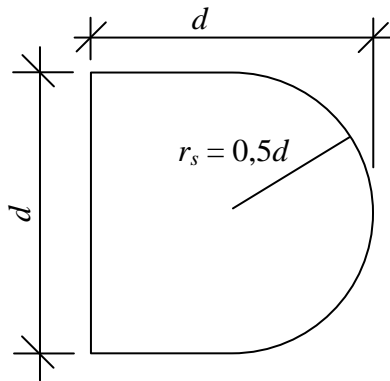
m_s = splittrets massa i [lb].

$\rho_{\text{luft}} = 4,438 \cdot 10^{-5}$ [lb/in.³] specifik vikt för luft

$C_D = 0,6$ luftmotståndskoefficient

Standardsplitter definieras enligt figur B:3c.

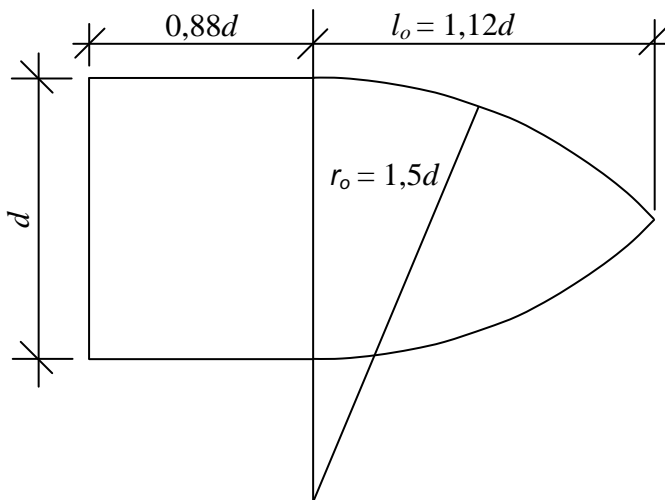
Splitterverkan



$$n = 0,5$$

$$N = 0,845$$

$$V = 0,654d^3$$



$$n = 1,5$$

$$N = 1,0$$

$$V = 1,2d^3$$

Figur B:3a. Ovan: standard splitterform, enligt ConWep (1992),
nedan: alternativ splitterform enligt U.S. Department of
Energy (1980).

N är formfaktor för nosen, n är kaliberradien.

$$N = 0,72 + 0,25\sqrt{n - 0,25} \quad (\text{B:3k})$$

där

$$n = \frac{r}{d} \quad (\text{B:3l})$$

Volymen för en ogival tangent nosform (icke cylindrisk del av splittret), beräknas enligt följande formel, för härledning av denna se Bilaga B:52:

$$V = \pi \left[Lr_o^2 - \frac{L^3}{3} - \left(r_o - \frac{d}{2} \right) r_o^2 a \sin\left(\frac{L}{r_o}\right) \right], \text{ [asin i rad]} \quad (\text{B:3m})$$

Ekvivalent area A för ett standardsplitter beräknas enligt följande:

Splitterverkan

$$m_s = \rho V = \rho \cdot 0,654d^3 \quad (\text{B:3n})$$

där

$$d^3 = \frac{m_s}{\rho \cdot 0,654} \quad (\text{B:3o})$$

lös ut d^2 ur samband B:3o

$$d^2 = \frac{m_s^{2/3}}{(\rho \cdot 0,654)^{2/3}} \quad (\text{B:3p})$$

och insättning i B:3j ger med densitet för stålsplitter på $0,3427 \text{ lb/in.}^3$ ($7\,800 \text{ kg/m}^3$):

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4} \frac{m_s^{2/3}}{(\rho \cdot 0,654)^{2/3}} \quad (\text{B:3q})$$

För att omvandla splitterhastigheten till SI-enheter skriv om faktorerna i ekvation (B:3i) enligt följande:

$$\rho_{\text{luftSI}} = \frac{f_1^3}{f_5} \rho_{\text{luft}} \quad (\text{B:3r})$$

$$r_{\text{SI}} = \frac{1}{f_2} r \quad (\text{B:3s})$$

$$A_{\text{ekvSI}} = \frac{\frac{\pi}{4 \left(\frac{f_1^3}{f_5} \rho \cdot 0,654 \right)^{2/3}}}{\left(\frac{1}{f_5} \right)^{1/3} m_s^{1/3}} \quad (\text{B:3t})$$

Insättning av faktorerna (B:3r), (B:3s) och (B:3t) i ekvation (B:3i) ger retardationskoefficienten k_v :

$$k_v = -12 \frac{\frac{\pi}{4 \left(\frac{f_1^3}{f_5} \rho \cdot 0,654 \right)^{2/3}}}{\left(\frac{1}{f_5} \right)^{1/3}} \frac{f_1^3}{f_5} \frac{1}{f_2} \rho_{\text{luft}} C_D \frac{r}{m_s^{1/3}} \quad (\text{B:3u})$$

med omvandlingsfaktorer enligt tabell B:2a och med densitet för luft och stål enligt nedan fås:

Splitterverkan

$$\rho_{\text{luft}} = 1,01 \text{ [kg/m}^3\text{]} \quad (\text{B:3v})$$

$$\rho = 7800 \text{ [kg/m}^3\text{]} \quad (\text{B:3w})$$

ger:

$$k_v = -12 \frac{\pi \left(\frac{0,0254^3}{0,4536} 7800 \cdot 0,654 \right)^{2/3}}{\left(\frac{1}{0,4536} \right)^{1/3}} \frac{0,0254^3}{0,4536} \frac{1}{0,3048} 1,01 \cdot 0,6 \frac{r}{m_s^{1/3}} \quad (\text{B:3x})$$

Förenkla, då fås:

$$k_v = -0,002 \frac{r}{m_s^{1/3}} \quad (\text{B:3y})$$

vilket ger splitterhastigheten för ett standardsplitter:

$$v_r = v_0 e^{-0,002r/m_s^{1/3}} \quad (\text{B:3z})$$

För det alternativa splittret i figur B:3c minskar den ekvivalenta arean. Ekvivalent area A för alternativa splittret beräknas som:

$$m_s = \rho V = \rho \cdot 1,2d^3 \quad (\text{B:3aa})$$

där d^3 kan lösas ut som:

$$d^3 = \frac{m_s}{\rho \cdot 1,2} \quad (\text{B:3ab})$$

lös ut d^2 ur samband (B:3ab):

$$d^2 = \frac{m_s^{2/3}}{(\rho \cdot 1,2)^{2/3}} \quad (\text{B:3ac})$$

och insättning i B:3j ger:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4} \frac{m_s^{2/3}}{(\rho \cdot 1,2)^{2/3}} \quad (\text{B:3ad})$$

För att omvandla splitterhastigheten till SI-enheter görs detta på motsvarande sätt som för standard splittret och med omvandlingsfaktorer enligt tabell B:2a och med densitet för luft och stål enligt ekvation (B:3v) och ekvation (B:3w) nedan fås:

Splitterverkan

$$k_v = -12 \frac{\frac{\pi}{4 \left(\frac{0,0254^3}{0,4545} \cdot 7800 \cdot 1,2 \right)^{2/3}}{\left(\frac{1}{0,4545} \right)^{1/3}} \frac{0,0254^3}{0,4545} \frac{1}{0,3048} 1,01 \cdot 0,6 \frac{r}{m_s^{1/3}}}{\quad} \quad (\text{B:3ae})$$

förenkla och då fås:

$$k_v = -0,0013 \frac{r}{m_s^{1/3}} \quad (\text{B:3af})$$

vilket ger splitterhastigheten för ett alternativt splitter:

$$v_r = v_0 e^{-0,0013r/m_s^{1/3}} \quad (\text{B:3ag})$$

B:4 Splitterfördelning

Antalet splitter n_{ms} med massan större än m_s kan beräknas enligt ConWep (1992) som:

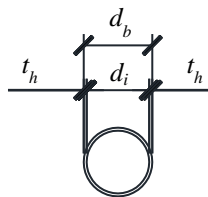
$$n_{ms} = n_s e^{-\sqrt{\frac{m_s}{M_A}}} = \frac{M_h}{2M_A} e^{-\sqrt{\frac{m_s}{M_A}}} \quad (\text{B:4a})$$

där M_h är höljets massa och M_A är en splitterfördelningsparameter.

Splitterfördelningsparametern beräknas som:

$$M_A = B^2 \cdot t_h^{5/3} \cdot d_i^{2/3} \left(1 + \frac{t_h}{d_i}\right)^2 \quad (\text{B:4b})$$

där B är Motts konstant (fragmenteringskonstant) som beror på explosivämnet enligt tabell B:4a, t_h är höljets ekvivalenta tjocklek och d_i är höljets ekvivalenta innerdiameter, se figur B:4a.



Figur B:4a. Indata till splitterfördelningsparametern.

Splitterverkan

Totala antalet splitter fås genom att sätta m_s till noll i ekvation (B:4a), vilket ger:

$$N_t = \frac{M_h}{2M_A} \quad (\text{B:4c})$$

där

M_h är höljets vikt i godtycklig enhet och

Uttrycket (B:4b) gäller för ett idealt cylindriskt hölje. Hur en bombs hölje omvandlas till en ekvivalent cylinder se Bilaga B:51.

B är en explosivkonstant enligt tabell B:4a

t_c är ekvivalent tjocklek på höljet

d_i är ekvivalent innerdiametern på höljet

Tabell B:4a. Motts konstant B i olika enheter för olika explosivämnen.

Explosive	$B^{(2)}$ (lb ^{1/2} /in ^{7/6})	$B^{(1)}$ (oz ^{1/2} /in ^{7/6})	$B^{(2)}$ (kg ^{1/2} /m ^{7/6})	$B^{(2)}$ (g ^{1/2} /mm ^{7/6})
Baratol	0,128	0,51	6,23	0,0623
Comp B	0,055	0,22	2,69	0,0269
Cyclotol (75/25)	0,050	0,20	2,44	0,0244
H-6	0,070	0,28	3,42	0,0342
HBX-1	0,065	0,26	3,18	0,0318
HBX-3	0,080	0,32	3,91	0,0391
Pentolite (50/50)	0,063	0,25	3,06	0,0306
TNT	0,075	0,30	3,67	0,0367

¹⁾ Urval från ConWep

²⁾ Omräknat enligt nedan

Motts konstant kan omräknas från en enhet till en annan godtycklig enhet och ekvationerna (B:4a), (B:4b) och (B:4d) kan nyttjas (endast om samma enhet nyttjas i samtliga ekvationer).

Exempelvis räknas Motts konstant från (lb^{1/2}/in^{7/6}) till (kg^{1/2}/m^{7/6}) genom att multiplicera konstanten för lb-in enhet med faktorn:

$$f = \frac{0,4536^{1/2}}{0,0254^{7/6}} \quad (\text{B:4a})$$

Genomsnittsvikten för ett splitter beräknas genom att dividera höljets massa med antalet splitter:

Splitterverkan

$$m_{\text{smedel}} = \frac{M_h}{n_s} = 2M_A \quad (\text{B:4d})$$

Splitterfördelningsparametern M_A finns framtagna för olika bomber och dessa finns tabulerade i ConWep (1992). Dessa anges i enhet [oz], för att beräkna splitterfördelning i SI-enheter (eller annan godtycklig enhet) kan splitterfördelningsparametern omvandlas genom att multiplicera med en faktor. Exempelvis beräknas splitterfördelningen i enheten [kg] (för höljet och splitter) multipliceras M_A med faktorn 0,02834. Tabell B:4b anger splitterfördelningsparametern M_A för olika bomber.

Tabell B:4b. Splitterfördelningsparametern M_A i olika enheter för lika vapen.

Vapen typ	$M_A^{2)}$ [lb]	$M_A^{1)}$ [oz]	$M_A^{2)}$ [kg]	$M_A^{2)}$ [g]
GP 250lb Mk81	$3,12 \cdot 10^{-3}$	0,050	$1,42 \cdot 10^{-3}$	1,42
GP 500lb Mk82	$4,50 \cdot 10^{-3}$	0,072	$2,04 \cdot 10^{-3}$	2,04
GP 1000lb Mk83	$1,27 \cdot 10^{-3}$	0,204	$5,78 \cdot 10^{-3}$	5,78
Spränggranat 155mm	$1,58 \cdot 10^{-3}$	0,253	$7,17 \cdot 10^{-3}$	7,17

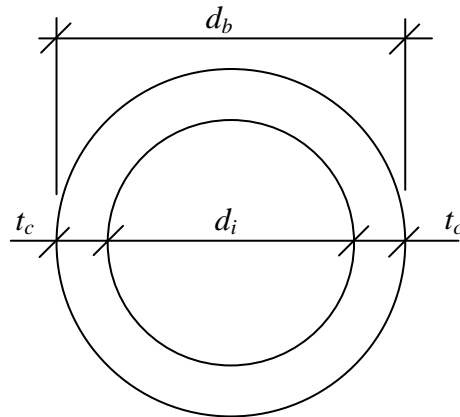
¹⁾ Urval ur ConWep

²⁾ Omräknat

B:5 Bombgeometri

B:51 Ekvivalent cylinder

För att kunna bestämma splitterfördelningen omvandlas bomben till en ekvivalent cylinder enligt figur B:51a:



Figur B:51a. Ekvivalent cylinder, tvärsnitt. Cylindern har längden L .

Ytterdiameter beräknas enligt följande:

$$d_b = d_i + 2t_c \quad (\text{B:51a})$$

Tvärsnittsarean och volymen för den ekvivalenta cylindern fås enligt följande:

$$A = \pi \frac{d_b + d_i}{2} \cdot t_c \quad (\text{B:51b})$$

$$V = L \cdot A \quad (\text{B:51c})$$

Massan för cylinder sätts till höljets massa och uttrycks som densitet multiplicerat med volym:

$$m = \rho \cdot V = \rho L \pi \frac{d_b + d_i}{2} \cdot t_c \quad (\text{B:51d})$$

insättning av ekvation (B:51a) ger, samt lös ut tjockleken t :

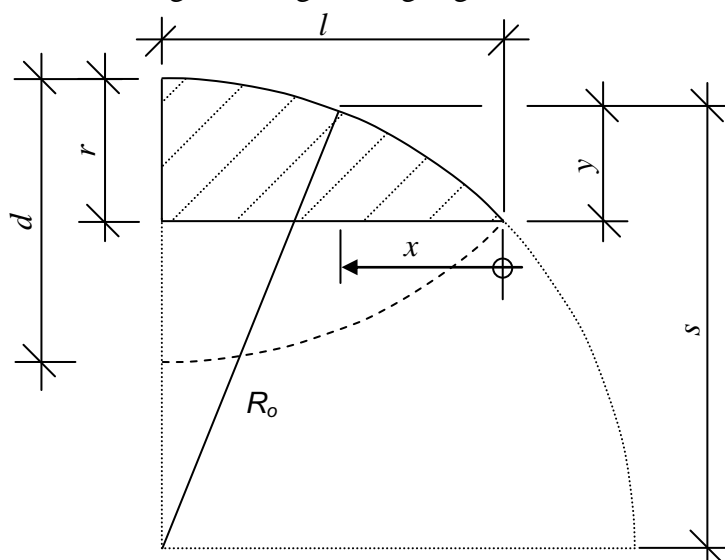
$$t_c^2 - t_c d_b + \frac{m}{\rho L \pi} = 0 \quad (\text{B:51e})$$

med lösningen

$$t_c = \frac{d_b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d_b}{2}\right)^2 - \frac{m}{\rho L \pi}} \quad (\text{B:51f})$$

B:52 Tangent-ogival nosform

En väldigt vanlig form på nosen hos projektiler är en så kallad tangent-ogival nosform. Denna nosform nyttjas även för splitter ibland. En tangent-ogival nosform är formad av ett segment av en cirkel där basen väljs som tangenten till cirkeln. Radien för basen r för en tangent-ogival nosform är mindre än cirkelns (sätts dessa lika fås en halvsfär). Detta segment av cirkeln roteras kring dess längd l enligt figur B:42a.



Figur B:42a. Tangent-ogival nosform.

Radien som formar den ogivala formen benäms ogival radie R_o . Samband mellan diametern, längden och den ogivala radien kan härledas med pythagoras sats enligt följande:

$$R_o^2 = l^2 + \left(R_o - \frac{d}{2}\right)^2 = l^2 + (R_o - r)^2 \quad (\text{B:42a})$$

omskrivet blir den ogivala radien ger:

$$R_o = \frac{r^2 + l^2}{d} = \frac{r^2 + l^2}{2r} \quad (\text{B:42b})$$

Radien y för nosen varierar mellan noll och r . Höjden y beräknas enligt följande:

$$y = s - (R_o - r) \quad (\text{B:42c})$$

sträckan s beräknas med Pythagoras sats:

$$R_o^2 = s^2 + (l - x)^2 \quad (\text{B:42d})$$

Splitterverkan

Lös ut s och insättning i ekvation (B:42c) ger

$$y = \sqrt{R_o^2 - (l-x)^2} + (r - R_o) \quad (\text{B:42e})$$

Volymen beräknas genom att rotera y kring x -axeln enligt följande:

$$V = \int_0^x \pi y^2 dx \quad (\text{B:42f})$$

med lösningen för $x = l$:

$$V = \pi \left[l R_o^2 - \frac{l^3}{3} - (R_o - r) R_o^2 a \sin\left(\frac{l}{R_o}\right) \right], \text{ asin i rad.} \quad (\text{B:42g})$$

Nedan följer härledning av denna lösning:

$$y = \sqrt{R_o^2 - (l-x)^2} + (r - R_o) \quad (\text{B:42h})$$

$$V = \pi \int_0^x \left[\sqrt{R_o^2 - (l-x)^2} + (r - R_o) \right]^2 dx \quad (\text{B:42i})$$

Utveckla kvadraten och bryt ut integralen i tre enklare integraler:

$$V = \pi \left[\int_0^x -(l-x)^2 dx + 2(r - R_o) \int_0^x \sqrt{R_o^2 - (l-x)^2} dx + \int_0^x R_o^2 + (r - R_o)^2 dx \right] \quad (\text{B:42j})$$

$$V = \pi [I_1 + 2(r - R_o)I_2 + I_3] \quad (\text{B:42k})$$

Första integralen har lösningen:

$$I_1 = \int_0^x -(l-x)^2 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + lx^2 - l^2x \right]_0^x = |x=l| = -\frac{l^3}{3} \quad (\text{B:42l})$$

Den andra intergralen har lösningen:

$$I_2 = \int_0^x \sqrt{R_o^2 - (l-x)^2} dx = \int_0^x \sqrt{-x^2 + 2lx + (R_o^2 - l^2)} dx \quad (\text{B:42m})$$

Substituera:

$$a = -1, b = 2l, c = (R_o^2 - l^2) \quad (\text{B:42n})$$

Då fås:

$$I_2 = \int_0^x \sqrt{-x^2 + 2lx + (R_o^2 - l^2)} dx = \int_0^x \sqrt{ax^2 + bx + c} dx \quad (\text{B:42o})$$

med lösningen för $a < 0$:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^x \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \frac{2ax + b}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \\ &= \left[\frac{2ax + b}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{1}{\sqrt{-a}} a \sin\left(\frac{-2ax - b}{\sqrt{-k}}\right) \right]_0^x \end{aligned} \quad (\text{B:42p})$$

där $k = 4ac - b^2$, lösningen blir:

$$I_2 = \left[\begin{aligned} &\frac{2(-1)x + 2l}{4(-1)} \sqrt{-x^2 + 2lx + (R_o^2 - l^2)} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{-(-1)}} a \sin\left(\frac{-2(-1)x - 2l}{\sqrt{-k}}\right) \end{aligned} \right]_0^x \quad (\text{B:42q})$$

där $k = 4(-1)(R_o^2 - l^2) - (2l)^2$, för $x = l$ fås:

$$I_2 = \frac{l}{2} \sqrt{(R_o^2 - l^2)} + \frac{R_o^2}{2} a \sin\left(\frac{l}{R_o}\right) \quad (\text{B:42r})$$

Den tredje integralen har lösningen:

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^x R_o^2 + (r - R_o)^2 dx = \left[(R_o^2 + (r - R_o)^2)x \right]_0^x \\ &= |x = l| = l(R_o^2 - (r - R_o)^2) \end{aligned} \quad (\text{B:42s})$$

Slutligen sätt samman I_1 , I_2 och I_3 då fås:

$$\begin{aligned} V &= \pi [I_1 + 2(r - R_o)I_2 + I_3] \\ &= \pi \left[\begin{aligned} &-\frac{l^3}{3} + 2(r - R_o)\left(\frac{l}{2}\sqrt{(R_o^2 - l^2)}\right) \\ &+ \frac{R_o^2}{2} a \sin\left(\frac{l}{R_o}\right) + l(R_o^2 - (r - R_o)^2) \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (\text{B:42t})$$

Förenkla och nyttja sambandet B:42b, då fås ett uttryck redovisat i litteraturen för att beräkna volymen för en tangent-ogival nos som:

Splitterverkan

$$V = \pi \left[IR_o^2 - \frac{l^3}{3} - (R_o - r)R_o^2 a \sin\left(\frac{l}{R_o}\right) \right], \quad a \sin \text{ i rad.} \quad (\text{B:42u})$$

Bilaga C Splitterverkan - detaljer

C:1 Penetrationsdjup

C:11 ConWep

För att beräkna penetrationsdjupet, x i massiv betong kan följande formler nyttjas, enligt ConWep (1992). Ekvationerna är i enhet inch-pound (amerikanska). I tabell B:2a anges omvandlingsfaktorer för att beräkna om penetrationsdjup till SI-enheter.

$$x = \frac{0,95 m_s^{0,37} v_s^{0,9}}{f_c^{0,25}} \quad \text{för } x \leq 1,4 m_s^{1/3} \quad (\text{C:11a})$$

eller

$$x = \frac{0,464 m_s^{0,4} v_s^{1,8}}{f_c^{0,5}} + 0,487 m_s^{1/3} \quad \text{för } x > 1,4 m_s^{1/3} \quad (\text{C:11b})$$

där m_s är splittermassa i [oz], v_s är splitterhastighet i [kfps], f_c är betongens tryckhållfasthet i [ksi].

För icke-amerikaner är det oftast enklare att nyttja SI-enheter. För att inte behöva nyttja omvandlingsfaktorer i tabell B:2a kan penetrationsdjupet räknas genom en omskrivning av ekvationerna (C:11a) och (C:11b) enligt följande exempel:

I detta exempel anges indata som splittermassa i [kg], hastighet i [m/s] och tryckhållfasthet i [Pa] och penetrationsdjupet fås i [mm]. Ekvation (C:11a) kan skrivas som, omvandlingsfaktorerna f_2 , f_3 och f_4 fås från tabell B:1a:

$$\frac{x}{25,4} = \frac{0,95 \left(\frac{m_s}{f_4} \right)^{0,37} \left(\frac{v_s}{f_2 \cdot 1000} \right)^{0,9}}{\left(\frac{f_c}{f_3 \cdot 10^6} \right)^{0,25}} \quad (\text{C:11c})$$

efter omskrivning av ekvation (C:11c) fås

Splitterverkan

$$\frac{x}{25,4} = \frac{0,95 \cdot \left(\frac{1}{0,02834}\right)^{0,37} \left(\frac{1}{0,3048 \cdot 1000}\right)^{0,9} m_s^{0,37} v_s^{0,9}}{\left(\frac{1}{6,895 \cdot 10^6}\right)^{0,25} f_c^{0,25}} \quad (\text{C:11d})$$

efter förenkling blir ekvation (C:11d):

$$x = \frac{26,9 m_s^{0,37} v_s^{0,9}}{f_c^{0,25}} \quad (\text{C:11e})$$

På motsvarande sätt kan ekvation (C:11b) härledas till:

$$\dots x = \frac{4,35 m_s^{0,4} v_s^{1,8}}{f_c^{0,5}} + 40,6 m_s^{1/3} \quad (\text{C:11f})$$

Sammanfattningsvis kan penetrationsdjupet i [mm] räknas som:

$$x = \frac{26,9 m_s^{0,37} v_s^{0,9}}{f_c^{0,25}} \quad \text{för } x \leq 117 m_s^{1/3} \quad (\text{C:11g})$$

och

$$x = \frac{4,35 m_s^{0,4} v_s^{1,8}}{f_c^{0,5}} + 40,6 m_s^{1/3} \quad \text{för } x > 117 m_s^{1/3} \quad (\text{C:11h})$$

där splittermassan, m_s är i [kg], hastigheten, v_s är i [m/s] och tryckhållfastheten, f_c är i [Pa].

På liknande sätt kan inträngningsdjup beräknas där indata anges i olika enheter, såsom [kg] eller [g], [Pa] eller [MPa], det som ändras är faktorerna k_1 , k_2 , k_3 och k_4 :

$$x = \frac{k_1 m_s^{0,37} v_s^{0,9}}{f_c^{0,25}} \quad \text{för } x \leq k_4 m_s^{1/3} \quad (\text{C:11i})$$

och

$$x = \frac{k_2 m_s^{0,4} v_s^{1,8}}{f_c^{0,5}} + k_3 m_s^{1/3} \quad \text{för } x > k_4 m_s^{1/3} \quad (\text{C:11j})$$

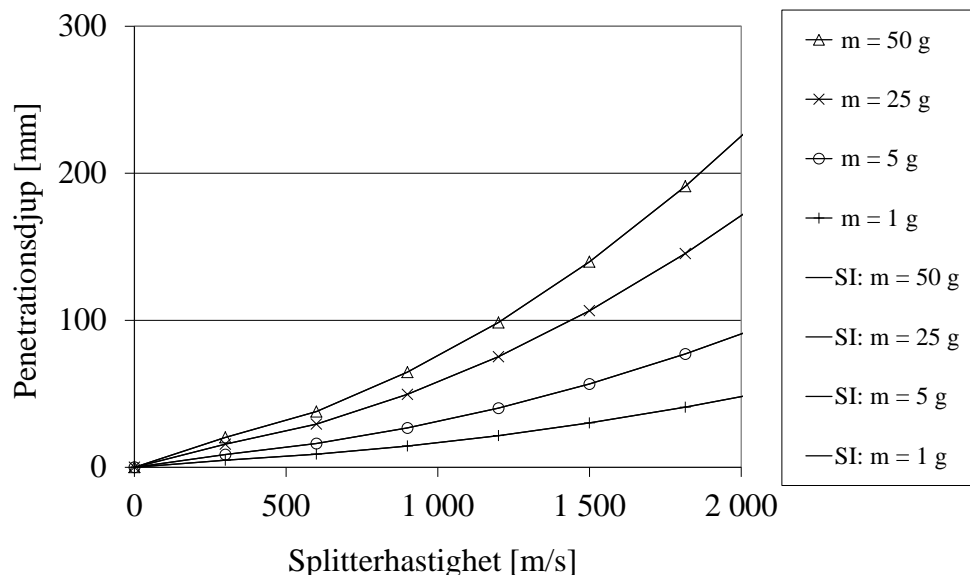
I tabell C:11a redovisas omvandlingsfaktorer.

Splitterverkan

Tabell C:11a. Omvandlingsfaktorer från Inch-pound till SI-enheter för empiriska samband i ekvationerna (C:11i) och (C:11j).

	[g], [Pa]	[g], [MPa]	[kg], [Pa]	[kg], [MPa]
k_1	2,085	0,0659	26,9	0,85
k_2	0,274	$2,74 \cdot 10^{-4}$	4,35	$4,35 \cdot 10^{-4}$
k_3	4,06	4,06	40,6	40,6
k_4	11,7	11,7	117	117

Figur C:11a visar penetrationsdjup med varierande spittermassa och hastighet, dels med inch-pound enheter enligt ConWep (1992), se ekvationerna (C:11a-b) och enligt ekvationerna (C:11i-j) vilka är omvandlade till SI-enheter. Omvandlingsfaktorer i de omvandlade ekvationerna är avrundade, dock visar figur C:11a att ekvationer enligt ConWep och de ekvationer som är omvandlade till SI-enheter överlappar varandra, varav avrundningen blir försumbar.



Figur C:11a. Penetrationsdjup med ekvationer från ConWep (1992), SI: omskrivet till SI-enheter.

C:12 Bk 25

Enligt Bk 25, Fortifikationsförvaltningen (1973), kan penetrationsdjupet x , beräknas som:

$$x = 180 \cdot 10^{-6} v_s m_s^{1/3} \quad (\text{C:12a})$$

där v_s är splitter hastighet i [m/s] enligt ekvationerna (B:4a) och (B:4c) och m_s är spittermassa i [kg].

C:2 Perforation

Minsta tjocklek hos betongkonstruktion som erfordras för att förhindra perforation för en varierande splittermassa och hastighet kan bestämmas enligt följande formel, se Krauthammer (2000):

$$t_p = 1,09xm_s^{0,033} + 0,91m_s^{0,33} \quad (\text{C:2a})$$

där x är inträngningsdjup enligt ekvationerna (C:11a) och (C:11b) och m_s är splittermassa i [oz].

Ekvation (C:2a) kan skrivas om till SI-enheter genom att nyttja omvandlingsfaktorer, se tabell B:2a. Minsta tjocklek hos betongkonstruktioner som erfordras för att förhindra perforation i [mm] fås som:

$$\frac{t_p}{25,4} = 1,09 \frac{x}{25,4} \left(\frac{m_s}{0,02834} \right)^{0,033} + 0,91 \left(\frac{m_s}{0,02834} \right)^{0,33} \quad (\text{C:2b})$$

Förenkling av ekvationen (C:2b) ger:

$$t_p = 1,23xm_s^{0,033} + 74,9m_s^{0,33} \quad (\text{C:2c})$$

där x beräknas från ekvationerna (C:11i) och (C:11j) och m_s är splittermassa i [kg], och enheten för minsta tjocklek som erfordras för att förhindra perforation fås i [mm].

C:3 Utstötning

Minsta tjocklek hos betongkonstruktion som erfordras för att förhindra utstötning för en varierande splittermassa och hastighet kan bestämmas enligt följande formel, enligt Krauthammer (2000):

$$t_u = 1,17xm_s^{0,033} + 1,47m_s^{0,33} \quad (\text{C:3a})$$

där x är inträngningsdjup enligt ekvationerna (C:11a) och (C:11b) och m_s är splittermassa i [oz].

Ekvation (C:3a) kan skrivas om till SI-enheter genom att nyttja omvandlingsfaktorer på motsvarande sätt som vid omvandling av ekvationen för perforation, se avsnitt C:2. Minsta tjocklek hos betongkonstruktioner som erfordras för att förhindra utstötning i [mm] fås som:

$$\frac{t_u}{25,4} = 1,17 \frac{x}{25,4} \left(\frac{m_s}{0,02834} \right)^{0,033} + 1,47 \left(\frac{m_s}{0,02834} \right)^{0,33} \quad (\text{C:3b})$$

Splitterverkan

Förenkling av ekvationen (C:3b) ger:

$$t_u = 1,32xm_s^{0,033} + 121m_s^{0,33} \quad (\text{C:3c})$$

där x beräknas från ekvationerna (C:11i) och (C:11j) och m_s är splittermassa i [kg], och enheten för minsta tjocklek som erfordras för att förhindra utstötning fås i [mm].

Bilaga D Kombinerad stötvågs- och splitterbelastning - detaljer

D:1 SDOF

D:11 Explicit central differensmetod

Nedan redovisas en numerisk lösning till differentialekvation presenterad i kapitel 6. Ekvationerna är hämtade från Johansson och Laine (2009), där ytterligare information om numeriska metoder finns beskrivet. Lösningen stegar sig fram i tiden med tidssteget Δt .

För explicit integrationsmetod beräknas förskjutningen ${}^{t+\Delta t}u$ utgående från jämvikt vid tidpunkt t enligt följande:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + K^t u = {}^t F \quad (\text{D:11a})$$

Hastigheten och accelerationen för tidssteget t beräknas som:

$${}^t \dot{u} = \frac{1}{2\Delta t} ({}^{t+\Delta t}u - {}^{t-\Delta t}u) \quad (\text{D:11b})$$

$${}^t \ddot{u} = \frac{1}{\Delta t^2} ({}^{t+\Delta t}u - 2{}^t u + {}^{t-\Delta t}u) \quad (\text{D:11c})$$

där ${}^{t+\Delta t}u$ och ${}^{t-\Delta t}u$ avser förskjutningen tidssteget Δt efter och för tiden t .

Genom insättning av D:11b och D:11c i D:11a kan förskjutningen ${}^{t+\Delta t}u$ lösas ut som:

$${}^{t+\Delta t}u = \left(\frac{1}{\Delta t^2} + \frac{C}{2\Delta t} \right)^{-1} \left(F - \left[K - \frac{2M}{\Delta t^2} \right] {}^t u - \left[\frac{M}{\Delta t^2} - \frac{C}{2\Delta t} \right] {}^{t-\Delta t}u \right) \quad (\text{D:11d})$$

Denna ekvation är dock inte "självstartande" utan information om tidssteget ${}^{t-\Delta t}u$ erfordras. Denna förskjutning kan beräknas som:

$${}^{t-\Delta t}u = {}^0 u - \Delta t {}^0 \dot{u} + \frac{\Delta t^2}{2} {}^0 \ddot{u} \quad (\text{D:11e})$$

En stabil lösning till differentialekvationen (D:11a) erhålls då tidssteget hålls tillräckligt liten. Tidssteget skall vara lägre än ett kritiskt tidssteget enligt följande:

Splitterverkan

$$\Delta t < \Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{\max}} \quad (\text{D:11f})$$

där ω är vinkelfrekvensen vilket beräknas som:

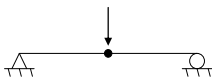
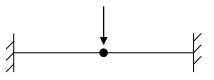
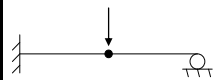

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (\text{D:11g})$$

I exempel redovisade i denna rapport försummas dämpningen och ekvation (D:11d) kan förenklas till:

$${}^{t+\Delta t}u = \left(\frac{1}{\Delta t^2}\right)^{-1} \left(F - \left[K - \frac{2M}{\Delta t^2} \right] {}^t u - \left[\frac{M}{2\Delta t} \right] {}^{t-\Delta t} u \right) \quad (\text{D:11h})$$

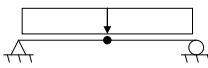
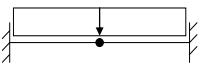
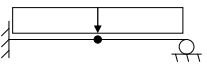
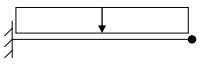
D:12 Omvandlingsfaktorer

Tabell D:12a. Sammanställning av transformationsfaktorer K_M , K_F samt K_{MF} för balk med varierande randvillkor och belastad med punktlast. Från Johansson och Laine (2009).

	Punktlast			
				
	Utböjningskurva elastiskt fall			
K_M	0,486	0,371	0,445	0,236
K_F	1,000	1,000	1,000	1,000
K_{MF}	0,486	0,371	0,446	0,236
	Utböjningskurva plastiskt fall			
K_M	0,333	0,333	0,333	0,333
K_F	1,000	1,000	1,000	1,000
K_{MF}	0,333	0,333	0,333	0,333

Splitterverkan

Tabell D:12b. Sammanställning av transformationsfaktorer K_M , K_F samt K_{MF} för balk med varierande randvillkor och belastad med jämnt utbredd last. Från Johansson och Laine (2009).

	Jämnt utbredd last			
				
	Utböjningskurva elastiskt fall			
K_M	0,504	0,406	0,483	0,257
K_F	0,640	0,533	0,600	0,400
K_{MF}	0,787	0,762	0,805	0,642
	Utböjningskurva plastiskt fall			
K_M	0,333	0,333	0,333	0,333
K_F	0,500	0,500	0,500	0,500
K_{MF}	0,667	0,667	0,667	0,667

